



SABEN COMPTAR ELS ANIMALS?

LA COMPLEXITAT DE LES MATEMÀTIQUES

Pau Carazo

Es poden definir les matemàtiques com el camp on mai sabem de què parlem, ni si el tema de què parlem és cert o no.

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

En matemàtiques no entens les coses, t'hi acostumes.

JOHANN VON NEUMANN (1903-1957)

Les matemàtiques constitueixen un dels cims intel·lectuals de la nostra cultura. Fins el punt que, més enllà del que ocorre amb altres exponents del saber humà com la literatura o l'art, ha arrelat en la societat la visió de les matemàtiques com una ciència enrevessada, hostil i fins i tot inaccessible. La capacitat per a realitzar operacions matemàtiques complexes, com el càlcul d'una divisió o d'una arrel quadrada, requereix conceptes abstractes que només són accessibles a la ment educada d'un ésser humà, ja que depenen d'habilitats simbòlicolingüístiques exclusives de la nostra espècie. Fins i tot un procés relativament senzill com el de comptar és un fenomen simbòlic, conscient, verbal i après que un bebè humà tarda entorn de quatre anys a dominar. En poques paraules, tot indica que la capacitat de comptar i realitzar operacions matemàtiques és un reducte reservat a l'espècie humana.

No obstant això, hi ha motius per a esperar l'existència d'habilitats numèriques en altres animals? Des d'un punt de vista evolutiu, aquesta pregunta representa un problema biològic fascinant. Els ximpanzés viuen en comunitats d'una població que pot oscil·lar entre 20 i 150 individus. La competència en-

tre comunitats veïnes sol ser intensa i amb relativa freqüència s'estableixen guerres que poden acabar en l'assassinat de membres d'una comunitat rival. No obstant això, els ximpanzés d'una comunitat només atacaran un rival si el superen àmpliament en nombre. Semblantment, quan un grup de lleones escolta els rugits d'un grup rival en la rodalia del seu territori, la decisió d'atacar o no dependrà del nombre de lleones que hagen escoltat rugir en relació al seu propi. En definitiva, l'axioma «el poder està en el nombre» explica aspectes del comportament social de gran quantitat d'espècies animals que semblen necessitar algun tipus de competència numèrica bàsica. Ara bé, realment saben comptar els animals? La clau per començar a respondre a aquest enigma evolutiu la trobem en l'estudi de nadons humans en etapes preverbals.

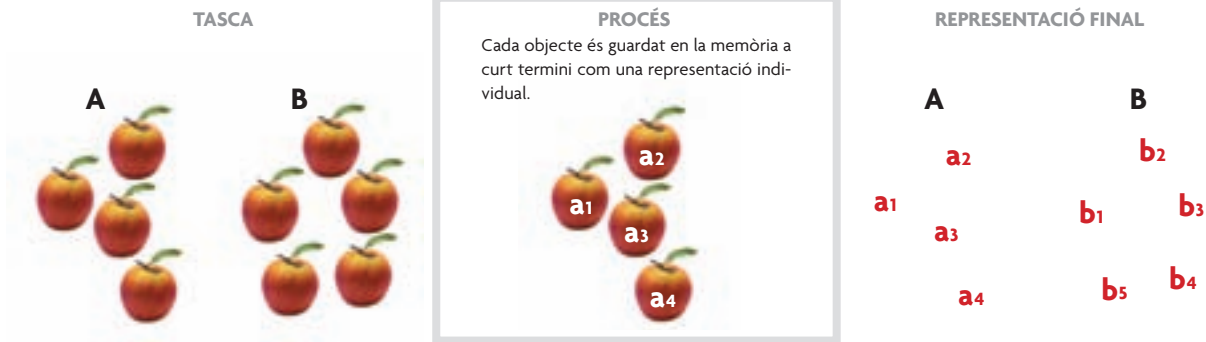
«LA CAPACITAT PER A REALITZAR OPERACIONS MATEMÀTIQUES COMPLEXES REQUEREIX CONCEPTES ABSTRACTES QUE NOMÉS SÓN ACCESSIBLES A LA MENT EDUCADA D'UN ÉSSER HUMÀ»

■ MATEMÀTIQUES INFANTILS

Com ja hem vist, l'adquisició d'un concepte simbòlic de nombre depèn de l'existència d'un llenguatge. Sense llenguatge no hi ha concepte de nombre i, com que sense concepte de nombre no hi ha lloc per a les matemàtiques, el llenguatge es converteix en un requisit indis-

pensable per a l'aprenentatge de les matemàtiques. No obstant això, i per a sorpresa de gran part de la comunitat científica, algunes investigacions realitzades en els últims anys suggereixen que el concepte simbòlic de nombre no és l'únic possible. De fet, sembla que els éssers humans disposem de dos sistemes innats de representació numèrica, de dos «sistemes de nombre», que són presents en etapes preverbals del nostre desenvolupament i que, per consegüent, són independents de l'adquisició d'un llenguatge.

Sistema exacte de nombre



Sistema aproximat de nombre



El «sistema aproximat de nombre» ens permet estimar conjunts compostos per un nombre d'objectes molt per damunt de set. Encara que no es tracta d'un procés en sèrie, podem visualitzar-lo com si el nostre cervell abocara un got d'aigua en l'atuell imaginari A per cada objecte present en el conjunt A (a sota). L'increment d'aigua per cada objecte és discret, però el resultat final és una magnitud contínua o, en altres paraules, una quantitat in comptable d'aigua. Al final del procés, el que conté la nostra memòria és la representació mental de dues magnituds contínues (l'atuell A i l'atuell B) la quantitat d'aigua de la qual representa el nombre aproximat d'objectes de cada conjunt. La representació és aproximada perquè la memorització és imprecisa. Per tant, obtenim una percepció aproximada de la quantitat d'objectes en cada conjunt, la qual cosa ens permet aventurar quin dels dos és major (en aquest cas el grup A).

El primer d'aquests sistemes és un «sistema exacte de nombre» (SENET) que ens permet valorar el nombre exacte d'objectes d'un conjunt sempre que aquest no siga superior a 4 en nadons o a 7 en adults. Es tracta d'un procés molt més ràpid que el procés simbòlic de comptar i apareix en nadons d'entre 9 i 12 mesos, molt abans de l'adquisició d'un llenguatge. Es pot comprovar com funciona amb un experiment molt senzill. Si preparam dos grups de, posem per cas, 3 i 4 bolígrafs (o qualsevol altre objecte a l'abast de la mà) i li'ls presentem simultàniament a un amic durant un breu instant (< 1s), serà capaç de dir-nos el nombre exacte de bolígrafs en cada grup fins i tot en absència de temps suficient per comptar verbalment els objectes. La nostra ment ens

permet realitzar aquest «truc» perquè emmagatzema, en la memòria a curt termini, representacions mentals individuals de cada un dels objectes de cada conjunt. D'aquesta manera, ens permet valorar d'una ullada la quantitat d'objectes que hi ha en un sol conjunt, o bé comparar en paral·lel dos conjunts distints i identificar quin dels dos conté un nombre més gran d'objectes.

El segon sistema de nombre, denominat «sistema aproximat de nombre», apareix fins i tot més prompte en el desenvolupament, a partir dels sis mesos d'edat, i ens permet avaluar el nombre d'objectes d'un conjunt de manera aproximada. Aquest segon sistema permet estimar conjunts compostos per un nombre d'objectes molt per damunt de 7, que constitueix el límit operatiu

EL CAVALL QUE NO SABIA COMPTAR

Una de les anècdotes més famoses en la història del comportament animal explica el cas de Hans, «el Llest», el cavall que sabia aritmètica. Hans era propietat de Wilhelm von Hosten, professor alemany de matemàtiques, frenòleg i entrenador amateur de cavalls que va meravellar la societat alemanya de començ del segle XIX amb les habilitats matemàtiques del seu cavall. Aparentment, von Hosten havia ensenyat al seu cavall Hans, dit «el Llest» per la premsa de l'època, a comptar, sumar i restar. Com era d'esperar, la troballa va aixecar molta nomenada i expectació entre la societat. Les notícies de les exhibicions públiques de talent de von Hosten i el seu cavall van arribar fins al govern alemany, que va acabar encarregant la formació d'un comitè d'investigació compost per tretze experts que incloïa el famós psicòleg i filòsof de l'època Carl Stumpf. Davant de la mirada atònita del comitè, quan von Hosten escrivia un nombre, una suma, o una resta a la pissarra situada enfront de Hans, aquest responia colpejant el terra amb la seua peüngla el nombre correcte de vegades. Al setembre de 1904, l'informe del comitè va concloure que no hi havia trucs involucrats i que, per tant, Hans era capaç de comptar i realitzar operacions aritmètiques simples. La història no quedaria ací. Poc de temps després, Oscar Pfungst, brillant psicòleg alemany, va traure el comitè del seu error. Després d'un estudi detallat, Pfungst va demostrar que Hans no era capaç de realitzar operacions matemàtiques sinó que responia



Von Hosten amb el seu cavall Hans «el Llest» i algunes de les pissarres que utilitzaven en les seues exhibicions.

al llenguatge corporal del seu amo. Involuntàriament, l'anticipació feia que von Hosten s'inclinara cap avant i canviara l'expressió de la cara quan Hans assolía el nombre correcte de colps, signes que el cavall havia après a interpretar com a senyal que havia de parar. Pfungst va demostrar fefaentment que Hans havia après a respondre davant d'aquestes subtileses, descobrint al seu torn el que avui coneixem com l'efecte «observador-expectativa» o efecte de Hans, el Llest. Així va ser com Oscar Pfungst va demostrar que Hans no podia comptar i, doncs, va tornar les matemàtiques al lloc d'on mai no haurien d'haver eixit: l'àmbit únic i intransferible del saber humà. O potser no?

P. C.

del sistema exacte de nombre, però només ens permet fer un càlcul aproximat del nombre d'objectes d'un conjunt. Això és degut al fet que el tipus de representació mental que actua en aquest sistema de nombre és radicalment diferent del primer. En aquest cas, el que emmagatzema la nostra ment no és una representació individual de cada objecte, sinó una magnitud anàloga al nombre total d'objectes del conjunt. En un experiment típic, se'ns presentaria una pantalla d'ordinador amb dos conjunts de, per posar un exemple, 19 i 29 punts respectivament. En aquesta situació, el nostre cervell associa a cada conjunt una magnitud *contínua* que representa, de manera aproximada, el nombre total d'objectes que conté.

En resum, els éssers humans disposem de dos sistemes de nombre que ens permeten *comptar* sense la necessitat d'*aprendre* a comptar. Bé és cert que semblen mecanismes rudimentaris, almenys si els comparem amb la nostra habilitat per comptar simbòlica-

ment. Tant és així, que molts científics es refereixen a aquests dos sistemes com «sistemes fonamentals de nombre» per distingir-los del concepte simbòlic i après de nombre que ens permet comptar verbalment. Ara bé, això no ens ha de fer perdre de vista l'enorme utilitat que aquests sistemes han pogut tenir en el transcurs de l'evolució. Al capdavant, es tracta de sistemes que ens permeten «comptar» en etapes del desenvolupament en què no hi ha un mètode alternatiu i, a més, en situacions en què no disposem de temps per a invocar fenòmens cognitius conscients com els responsables de comptar verbalment. Amb això en ment, no és difícil especular sobre els múltiples avantatges evolutius que l'adquisició d'aquest tipus de sistemes va poder reportar tant per als nostres avantpassats com per a moltes altres espècies d'animals. A més, es tracta de mecanismes que no requereixen capacitats cognitives excessivament complexes, per la qual cosa semblen la solució perfecta al nostre enigma evolutiu.

■ SABEN COMPTAR ELS ANIMALS?

Si per comptar entenem usar un sistema fonamental de nombre per avaluar la quantitat d'objectes d'un conjunt, la resposta és indubtablement que sí. De fet, fa ja algun temps que sabem que molts vertebrats exhibeixen sistemes de nombre que comparteixen les mateixes propietats que els nostres, per la qual cosa el raonament evolutiu més senzill és suposar que es tracta dels mateixos sistemes fonamentals de nombre sorgits a partir d'un avantpassat comú. Quan? Com en tantes altres ocasions en la història de la biologia, les hipòtesis sobre el possible origen evolutiu dels nostres sistemes fonamentals de nombre han anat variant gradualment a mesura que s'ha anat ampliant l'espectre d'espècies estudiades. Molt probablement a causa de l'antropocentrisme que encara impera en molts camps de la biologia, tradicionalment s'havia assumit que aquests sistemes devien ser exclusius dels primats. No obstant això, prompte es va descobrir que també existien en espècies de mamífers més allunyades evolutivament, com les rates, com també en molts grups més de vertebrats (ocells, peixos i amfibis). Aquests descobriments situen l'origen evolutiu dels sistemes fonamentals de nombre en algun avantpassat comú a tots els vertebrats, hipòtesi que ha romàs inalterada durant els últims anys. No obstant això, estudis apareguts en els darrers mesos apunten cap a un origen evolutiu molt més primitiu.

En un article publicat a l'octubre de 2008 en la revista científica *Animal Cognition*, investigadors de la Universitat de Queensland, Austràlia, demostren que les abelles de la mel (*Apis mellifera*) són capaces de comptar el nombre de fites que sobrevolen per a trobar una font d'aliment amb l'única condició que aquestes siguin menys de quatre. És difícil evitar el paral·lisme amb el sistema exacte de nombre, el límit funcional del qual és també de 4 tant en nadons humans com en altres vertebrats. D'altra banda, en un treball acabat de publicar pel nostre equip d'investigació en la mateixa revista, presentem uns resultats que suggereixen que els escarabats de la farina (*Tenebrio molitor*) poden exhibir un sistema de nombre que, per les seues característiques, recorda el sistema aproximat de nombre present en vertebrats. Encara que de caràcter preliminar, aquesta mena d'estudis fan pensar que es tracta de sistemes cognitius molt menys exclusius del que s'havia sospitat fins a avui.

■ DELS SISTEMES FONAMENTALS DE NOMBRE A LES MATEMÀTIQUES SIMBÒLIQUES

Recapitem una mica. Els éssers humans compartim una sèrie de sistemes innats de nombre amb moltes al-



© MÈTODE



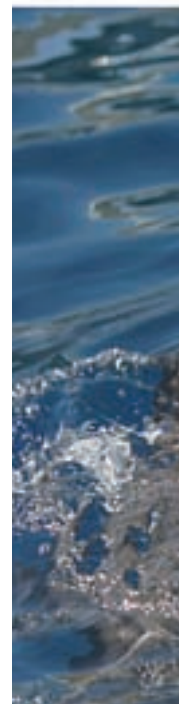
© MÈTODE



© MÈTODE



© Fernando Calatayud



Les darreres investigacions en el camp dels sistemes fonamentals de nombre en animals han descobert que, a més dels humans i alguns primats i dofins, aquests sistemes també estan presents en altres grups de vertebrats...com en guppies (*Poecilia reticulata*) o en salamandres (*Plethodon cinereus*), en les imatges de dalt a baix. Experiments recents suggereixen que els sistemes fonamentals de nombre ja són presents en algunes espècies d'invertebrats com ara l'escarabat de la farina (*Tenebrio molitor*) o l'abella de la mel (*Apis mellifera*).



© Javier Yaya

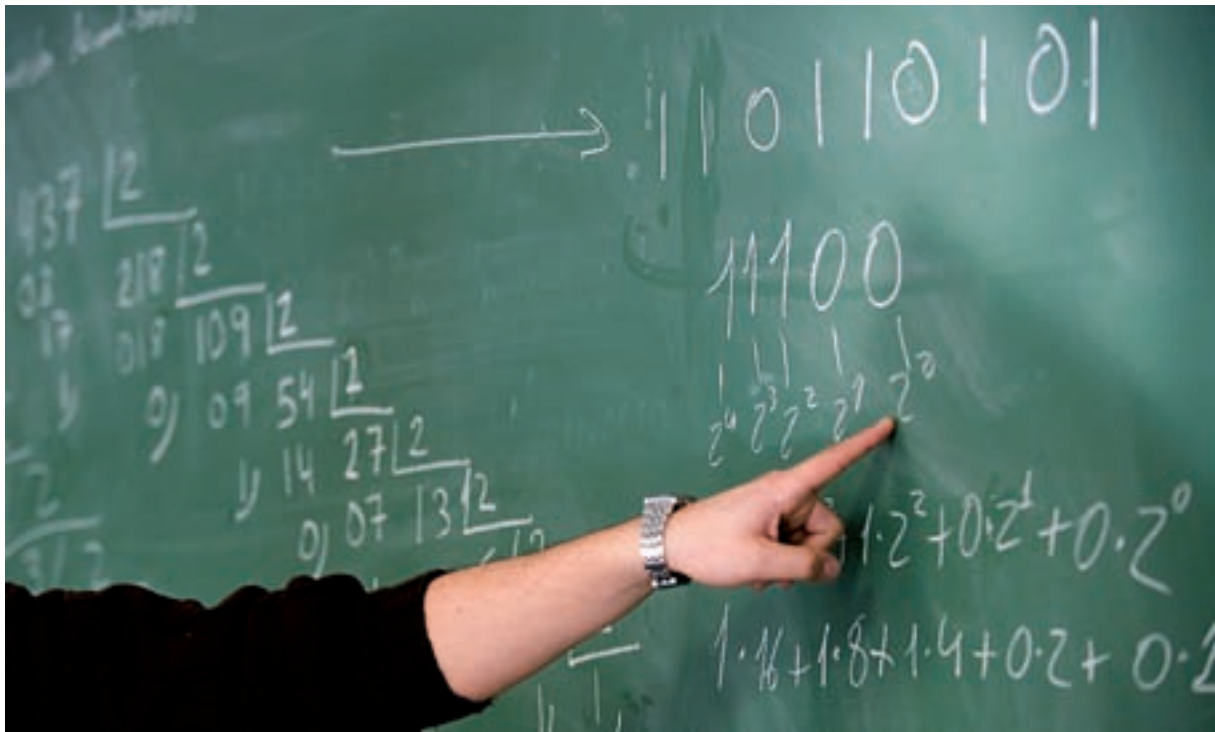
Tradicionalment s'havia acceptat que els sistemes fonamentals de nombre –que permeten estimar conjunts compostos per més de set elements– només eren presents en humans, altres primats i dofins mulars (*Tursiops truncatus*), en la imatge. Investigacions recents han ampliat aquestes capacitats a altres vertebrats i alguns invertebrats.

«SI PER COMPTAR ENTENEM USAR UN SISTEMA FONAMENTAL DE NOMBRE PER A AVALUAR LA QUANTITAT D'OBJECTES D'UN CONJUNT, LA RESPOSTA A SI ELS ANIMALS SABEN COMPTAR ÉS INDUBTABLEMENT QUE SÍ»

tres espècies d'animals. Aquests sistemes són independents del llenguatge, i expliquen les habilitats matemàtiques rudimentàries presents tant en els nadons com en altres espècies d'animals, però què succeeix amb les nostres habilitats per a les matemàtiques simbòliques? Quin factor marca el pas de l'aparent senzillesa amb què compta un bebè a l'exuberant complexitat dels logaritmes, els nombres imaginaris o els fractals? La resposta a aquesta pregunta és, indubtablement, la cultura. Des de la invenció (o el descobriment) del zero al desenvolupament del càlcul, passant per la comprensió

dels nombres negatius, racionals i reals, el sorgiment dels conceptes matemàtics està inexorablement relacionat amb el desenvolupament de la nostra història cultural. No obstant això, cal preguntar-se sobre l'origen de les habilitats cognitives que han permès aquest desenvolupament. D'on provenen els mecanismes que permeten al nostre cervell entendre i desplegar conceptes matemàtics purament simbòlics? Fins fa poc, el consens entre la comunitat científica era que aquests mecanismes són els mateixos responsables de les nostres habilitats simbolicolingüístiques; del nostre llenguatge. Partint dels esmentats substrats neurals, les nostres habilitats matemàtiques no serien més que fruit d'un procés d'aprenentatge.

No obstant això, alguns científics comencen a qüestionar molt seriosament la validesa d'aquesta hipòtesi. En un article publicat també a l'octubre de 2008 en la revista *Nature*, el doctor Halberda i els seus col·laboradors de la Universitat John Hopkins, als EUA, presenten els resultats d'un treball en què van sotmetre estudiants de catorze anys d'edat a una bateria d'experiments, de dificultat creixent, en què van analitzar la seua capacitat per discriminar entre dos conjunts d'objectes usant el sistema aproximat de nombre. Els seus resultats demostren que l'habilitat per a usar aquest sistema de nombre varia molt d'un individu a un altre, la qual cosa és encara més sorprenent; que la capacitat d'una persona determinada per a usar-ho està íntimament relacionada amb la seua aptitud per a les matemàtiques simbòliques. En altres paraules, els estudiants que mostren una habilitat destacada a l'hora d'utilitzar el sistema aproximat de nombre també exhibeixen una aptitud elevada en matemàtiques i viceversa. Paral·lelament, treballs recents del doctor Dehaene, un expert mundial en la matèria, demostren que les àrees cerebrals implicades en el sistema aproximat de nombre s'activen quan realitzem operacions matemàtiques simbòliques. Aquests resultats indiquen que aquest sistema exerceix un paper fonamental tant en l'aprenentatge com en l'execució d'operacions complexes, i suggereixen que el llenguatge no és, almenys per sí sol, el responsable de les nostres habilitats matemàtiques. El calat d'aquest descobriment és major del que pot semblar a simple vista, ja que significa fer un nou pas en contra de la idea, encara molt estesa en certs cercles acadèmics, que el nostre cervell és una *tabula rasa* sobre la qual «escriu» la nostra experiència. Així mateix, i una vegada més, ens obliga a introduir una perspectiva evolucionista en l'estudi d'un camp del comportament humà que sempre hem considerat una fita de la nostra cultura, i que creïem al marge de la força de l'evolució: les matemàtiques.



© Ana Ponce & Ivo Rovira

■ ARITMÈTICA ANIMAL

Una conseqüència afegida d'aquests descobriments és la següent: Si almenys part de les nostres habilitats matemàtiques depenen d'un sistema innat i evolutivament arcaic que compartim amb altres animals, sembla lícit plantejar-se la possibilitat que altres espècies exhibesquen habilitats matemàtiques més complexes que la simple capacitat per a comptar. Les últimes i més concloents investigacions en aquest sentit provenen dels estudis realitzats per l'equip de les doctores Jessica Cantlon i Elizabeth Brannon, de la Universitat de Duke, als EUA. En ells, demostren que les mones Rhesus no sols utilitzen el sistema aproximat de nombre per representar quantitats, sinó que són capaces de comparar aquestes representacions per ordenar grups d'objectes de menor a major (el principi d'ordenació, un dels principis bàsics de l'aritmètica). Més encara, Cantlon i Brannon posen en evidència que aquestes mones són capaces de sumar quantitats aproximades. Les proves disponibles indiquen que els processos subjacents a aquestes operacions són idèntics en humans i en mones

**«EN VISTA DELS DARRERS
DESCOBRIMENTS, ÉS DIFÍCIL
PREDIR FINS QUIN PUNT
LA NOSTRA HABILITAT
PER A LES MATEMÀTIQUES
SIMBÒLIQUES DEPÈN DE
MECANISMES CEREBRALS
INNATS, PRODUCTE DE
L'EVOLUCIÓ»**

Rhesus. Ambdós som capaços de realitzar operacions aritmètiques senzilles (ordenació, suma) mitjançant el sistema aproximat de nombre, sense recórrer a processos conscients associats al llenguatge. En vista d'aquests últims descobriments, resulta difícil predir fins quin punt la nostra habilitat per a les matemàtiques simbòliques depèn de mecanismes cerebrals innats, fruit de l'evolució. El futur haurà de conduir-nos per aquestes i altres senderes apassionants a la cerca de les pressions de selecció que hagen pogut donar lloc a l'evolució dels sistemes fonamentals de nombre. Sistemes que no sols ens permeten representar nombres de manera aproximada, sinó també operar sobre aquestes representacions per ordenar-les, sumar-les i, qui sap, potser fins i tot restar-les, multiplicar-les i dividir-les. Probablement, les respostes a aquestes preguntes les trobem en contextos socials comuns a un elenc d'animals molt més ampli del que podríem haver sospitat, des dels primats a, per què no?, les abelles i els escarabats. ☺

Pau Carazo. Grup d'Etologia, Institut Cavanilles de Biodiversitat i Biologia Evolutiva. Universitat de València.