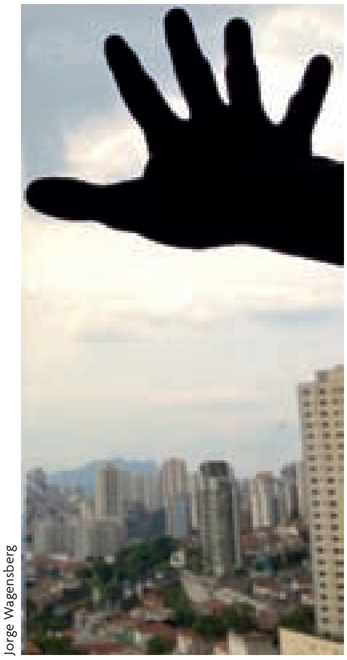
Nombres de bona família

per Jorge Wagensberg

Què tenen en comú un arbre, un planeta, un disgust i una promesa? El nombre 1! Els nombres són l'abstracció del llenguatge que permet, entre altres coses, donar compte de la quantitat sense atendre gaire a la qualitat. Si un pastor té només quatre ovelles, no li cal saber de nombres per comprovar cada matí que totes quatre han sobreviscut a la nit. Les coneix totes, potser fins i tot pel seu nom: Negreta, Lluna, Nina i Teresa. Però la quantitat, com a abstracció de la qualitat, es fa imprescindible si el ramat del pastor consta de vuit-centes ovelles. Un, dos, tres... són els nombres naturals. Els nombres naturals compten i ordenen. En canvi, cal ampliar la família per a incloure-hi el misteriós nombre zero i els nombres negatius. És una necessitat, ja que en cas contrari no podem donar compte d'un deute, ens confonem cada mil anys quan avancem un any la celebració del canvi de mil·lenni o ens incomoda nomenar els pisos d'un gratacel sense destacar la planta més usada: la planta zero per la qual s'entra en l'edifici i se'n surt... menys tres, menys dos, menys u, zero, u, dos, tres... són els nombres enters. Els nombres enters compten i ordenen a tots dos costats d'una referència.



Jorge Wagensberg

«Els nombres són l'abstracció del llenguatge que permet, entre altres coses, donar compte de la quantitat sense atendre gaire a la qualitat»

No obstant això, aquesta família tampoc no basta perquè no sempre es pot repartir una quantitat anomenada amb un nombre enter de manera que el que li toca a cadascuna de les parts sigui també anomenat amb un nombre enter. Un nombre racional es defineix amb un parell de nombres enters... un mig, dos terços, vint-i-dos setens... Els nombres racionals reparteixen, mesuren, calculen proporcions, resolen algunes equacions. A pesar d'això no totes les equacions tenen solucions reals, ni tots els problemes geomètrics es poden tractar amb aquesta família de nombres. Per exemple, no hi ha cap nombre racional que multiplicat per si mateix sigui igual a dos. Per exemple, la raó entre el perímetre d'una circumferència i el seu diàmetre no és un nombre racional. L'arrel de dos o el nombre pi no són racionals. Són els nombres reals. Els nombres reals resolen qualsevol geometria i algunes equacions. Però tampoc totes. Per exemple, no existeix cap nombre real que multiplicat per si mateix sigui igual a menys u. Anomenem aquest nombre la unitat imaginària i, amb aquesta unitat podem ampliar la família dels nombres reals a la bona família dels nombres complexos. Els intuïm, ens els imaginem i els comprenem molt bé els nombres naturals, els nombres enters, els nombres racionals i els nombres reals, però com podem intuir un nombre imaginari o complex?

Ho intentem. Cerquem un nombre que multiplicat per ell mateix sigui igual a menys u. Imaginem la representació geomètrica d'aquesta cerca. Serà senzillament el lloc geomètric on es tallen dues corbes, la paràbola $y=x^2$ i la recta $y=-1$. Tanmateix, la paràbola està sempre a la part positiva del pla xy, mentre que la recta $y=-1$ està sempre a la part negativa. És a dir: la intersecció entre les dues corbes és impossible, és a dir: l'equació $x^2=-1$ no té solució real [en contrast amb les corbes $y=x^2$ i la corba $y=1$, que es tallen en dos punts de coordenades (–1,1) i (1,1)]. No hi ha cap situació en què la paràbola $y=x^2$ i la recta $y=-1$ es troben en el món real... Però sí que poden fer-ho en el món imaginari! Com podem imaginar un món així? Només cal considerar que l'eix $y=0$ és un mirall semitransparent. La paràbola $y=x^2$ i la recta $y=-1$ no es troben l'una amb l'altra a aquest costat del mirall, però sí al darrere, ja que l'eix $y=0$, pel fet que és un espill, reflecteix la paràbola i, pel fet que és transparent, permet veure la recta. Va pensar en aquesta metàfora qui va batejar aquests nombres com a imaginaris? Probablement no, però va encertar de ple amb la seua intuïció. Els nombres imaginaris i els complexos viuen darrere l'espill al país de les meravelles de Lewis Carrol... Són poètics i d'un altre món, però tenen molt a veure amb aquest. En efecte, en les lleis fonamentals de la física apareixen tota mena de nombres, el 2, els nombres pi o el e però també la unitat imaginària i. Necessitem els nombres imaginaris per a governar el món real (per exemple l'equació de Schrödinger per a la física quàntica), tot i que en acabat només ens interessen les solucions reals, és a dir, les que són d'aquest més aquí.

Jorge Wagensberg. Professor titular del departament de Física Fonamental. Universitat de Barcelona.