



KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

EL PADRE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

M^a Rosa Massa Esteve

Un día cualquiera de 1873, en la Universidad de Berlín, los estudiantes se apuraban para llegar puntuales a las siempre motivadoras clases del profesor Karl Weierstrass (1815-1897), considerado como el padre del análisis matemático. Muchos teoremas fundamentales de las ramas del análisis llevan su nombre, ya sea porque él los descubrió o por haber sido el primero en darles una demostración completa y rigurosa. Sin embargo, si su aportación a la matemática es relevante no es menos interesante su vertiente humana y su contribución a la creación de los seminarios universitarios donde se originaron gran parte de los logros científicos del siglo XX.

■ LOS AÑOS DE ESTUDIANTE DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, distrito de Warendorf (Prusia, actualmente Alemania). Su padre Wilhelm, miembro de una familia de artesanos y pequeños comerciantes desde el siglo XVI, hombre inteligente, formado y que apreciaba la buena educación, era entonces secretario del alcalde (Biermann, 1970-1990).

Cuando tenía catorce años, Karl Weierstrass entró en el Instituto Católico de Paderborn, donde fue un estudiante excelente, siendo declarado «el mejor de todos» en varias materias, entre ellas la matemática. Es también en esta época cuando Karl trabajó como contable, para ayudar a la economía familiar, y cuando empezó a leer regularmente la influyente revista de matemáticas *Journal de Crelle: Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* (“Revista de matemáticas puras y aplicadas”).

Después de dejar el instituto, Karl Weierstrass complació a su padre, que quería que estudiase finanzas públicas y administración, y accedió a la Universidad de Bonn en 1834. Estos estudios no lo motivaron y tras ocho semestres sin aprobar nada volvió a casa dicién-

do que no quería estudiar esa carrera. Sin embargo, en Bonn había empezado a leer obras de matemáticas como el *Traité de Mécanique celeste* (1799-1825) de Pierre Simon Laplace (1749-1827) que le impresionaron. También leyó la obra de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (1829), aunque le resultó demasiado complicada. Entonces decidió leer una obra anterior de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), *Traité des fonctions elliptiques* (1825), y apuntes de las clases sobre funciones elípticas del que sería posteriormente su maestro, Christoff Gudermann (1798-1852).

Estas lecturas, así como la carta de Niels Henrik Abel a Legendre del año 1830 en la revista *Journal de Crelle*, le decidieron a estudiar matemáticas. Weierstrass lo explica más tarde, en una carta al matemático Marius Sophus Lie (1842-1899), el 10 de abril de 1882:

Para mí, esta carta [de Abel a Legendre], cuando la vi en *Crelle* durante mis años de estudiante, fue de gran importancia. La derivación inmediata de la forma de representación de la función dada por Abel, y designada por él por $\lambda(x)$, definiendo esta función a partir de la ecuación diferencial, fue la primera tarea matemática que me impuse a mí mismo; y su afortunada solución me decidió a dedicarme totalmente a las matemáticas.

(Biermann, 1970-1990, pp. 219-220)

Esta pasión por las matemáticas no lo abandonaría nunca y aunque estudiaba en la Universidad de Münster para ser profesor de secundaria, en 1841 escribió su primer artículo sobre la teoría de series de potencias y su convergencia. Christoff Gudermann, que le daba clases sobre las funciones elípticas, reconociendo su talento, insistió en decirle que continuase sus estudios de matemáticas y en su informe de evaluación escribió que Weierstrass era: «de igual rango que los inventores que se habían coronado con gloria».

«MUCHOS TEOREMAS
FUNDAMENTALES DE
LAS RAMAS DEL ANÁLISIS
LLEVAN EL NOMBRE DE
WEIERSTRASS, YA SEA
PORQUE ÉL LOS DESCUBRIÓ
O POR HABER SIDO
EL PRIMERO EN DAR UNA
DEMOSTRACIÓN COMPLETA
Y RIGUROSA»

A la izquierda, Karl Weierstrass en su octogésimo aniversario. El retrato es obra de Conrad Fehr (1854-1933). Pintura al pastel (103 x 108 cm).



MÉTHODE

En 1854 Karl Weierstrass publicó el artículo *Zur Theorie der Abelschen Functionen* ("Sobre la teoría de las funciones abelianas") en el *Journal de Crelle*, donde presentaba una descripción de su método para la representación de las funciones abelianas mediante las series de potencias convergentes (izquierda). Dos años más tarde, en 1856, Karl Weierstrass publicó en el mismo *Journal de Crelle* el famoso artículo que profundiza en la teoría de las funciones abelianas (derecha), *Theorie der Abelschen Functionen* ("Teoría de las funciones abelianas"), donde probó los resultados que en el artículo anterior tan solo había descrito.

Karl Weierstrass se convirtió en profesor de secundaria primero en Deutsch-Krone (1842-1848) y después en Braunsberg (1848-1855), aunque en 1850 empezó a encontrarse mal y a tener ataques de vértigo que se le repetirían durante doce años. Fueron años duros de investigación en solitario, sin bibliotecas ni correspondencia. Pero estas investigaciones dieron los primeros resultados. Así, en 1854 publicó el artículo *Zur Theorie der Abelschen Functionen* ("Sobre la teoría de las funciones abelianas"), en el que presentaba una descripción de su método para la representación de las funciones abelianas mediante las series de potencias convergentes. Casi en seguida, el 31 de marzo de 1854, la Universidad de Königsberg le confirió el grado de doctor *honoris causa* en reconocimiento de sus méritos.

Dos años más tarde, Weierstrass publicó el famoso artículo que profundiza en la teoría de las funciones abelianas: *Theorie der Abelschen Functionen* ("Teoría de las funciones abelianas"), donde probó los resultados que en el artículo anterior tan solo había descrito. Según David Hilbert, Weierstrass había obtenido uno de los más grandes resultados del análisis, la solución del problema de Jacobi sobre la inversión de integrales hiperelípticas. De hecho Weierstrass se dedicó durante toda su vida a fundamentar rigurosamente una teoría completa y coherente de las funciones abelianas.

«EN 1841 ESCRIBIÓ SU PRIMER ARTÍCULO SOBRE LA TEORÍA DE SERIES DE POTENCIAS Y SU CONVERGENCIA»

Gracias a estas contribuciones, el 14 de junio de 1856 Weierstrass dejó el instituto de secundaria y entró en el Berliner Gewerbeinstitut de la Technische Universität Berlín. Un año después fue nombrado miembro de la Academia de las Ciencias de Berlín y pasado un tiempo, en 1861, obtuvo la plaza de profesor en la Universidad de Berlín.

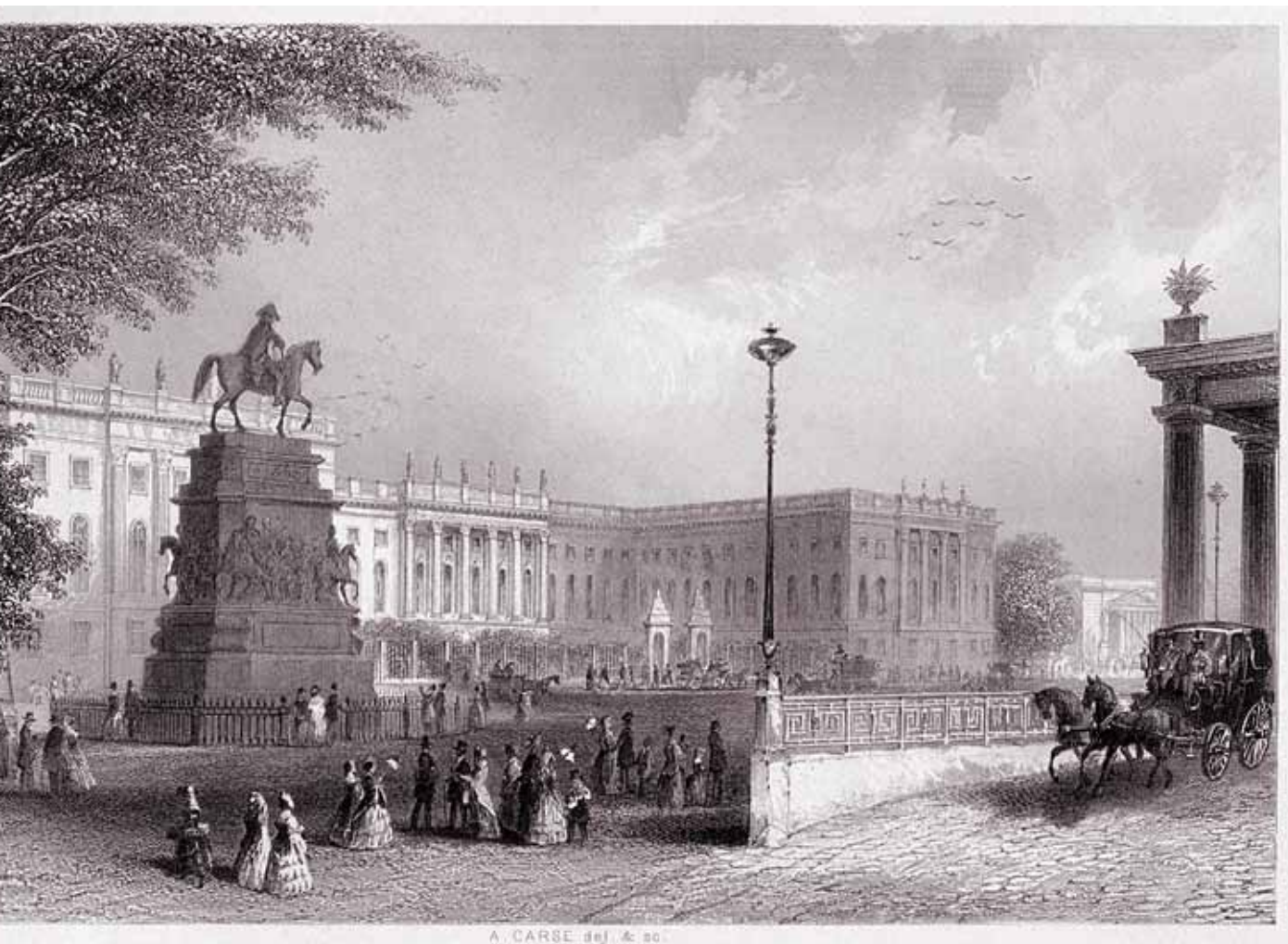
WEIERSTRASS, EN LA UNIVERSIDAD DE BERLÍN

La Universidad de Berlín fue creada en 1810, y del 1830 al 1840 ya había accedido a una situación privilegiada con Karl Gustav Jakob Jacobi, Peter Gustav Lejeune Dirichlet y Jakob Steiner. Pero en 1851 murió Jacobi, y en 1855 lo hizo Carl Friedrich Gauss, así que Dirichlet se fue a la Universidad de Göttingen a sustituir a este último. A Jacobi le sustituyó Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880), amigo de Weierstrass y quien, desde 1856 y hasta 1880, se encargó de la revista *Journal de Crelle*. A Dirichlet le sustituyó Ernst Kummer (1810-1893). A estos matemáticos se añadió Leopold Kronecker (1823-1891), alumno de Kummer y antes alumno de Dirichlet. Kummer obtuvo tan buena impresión de las contribuciones de Weierstrass que le consiguió un puesto como profesor extraordinario en la Universidad de Berlín, donde en 1864 llegó a ser catedrático y, posteriormente, rector.

Kummer y Kronecker formaron con Weierstrass el triunvirato que consiguió que la Universidad de Berlín se convirtiera en un centro de gran prestigio para los estudios de matemáticas. Desde 1861 hasta 1886 desarrollaron un plan bienal de cursos y cada dos años repetían el mismo programa: «Introducción a la teoría de las funciones analíticas», «Teoría de las funciones elípticas», «Aplicaciones de las funciones elípticas», «Teoría de las funciones abelianas», «Aplicaciones de las funciones abelianas» y «Cálculo de variaciones». Eran cursos muy reconocidos por toda Europa, a ellos asistían centenares de alumnos cada año y algunos de ellos se convirtieron en discípulos de Weierstrass. También asistían alumnos de estudios posdoctorales. Así, Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) explica que en 1873, cuando llegó a París a cursar estudios posdoctorales con Charles Hermite (1822-1901), las primeras palabras de éste fueron: «Usted ha cometido un error, señor [...]. Usted debería haber seguido los cursos de Weierstrass en Berlín. Él es nuestro maestro» (Mittag-Leffler, 1902). Y así lo hizo. En 1882, el propio Weierstrass reconocía que con estos cursos los estudiantes tenían: «la oportunidad de empezar con una serie de lecciones bienales a tratar la



MÉTHODE



La Universidad de Berlín fue creada en 1810, y casi desde el principio contó con destacados matemáticos como Karl Gustav Jakob Jacobi, Peter Gustav Lejeune Dirichlet y Jakob Steiner. En la imagen, la Universidad de Berlín en el siglo XIX.

más importante disciplina matemática en mesurada sucesión. Los temas que abarcan son leídos poco o nada en otras universidades o no lo son con regularidad» (Calinger, 1996, p. 166). Sin embargo, en esta época Weierstrass continuaba sufriendo problemas de salud, en este caso bronquitis y flebitis, y muchas veces tenía que impartir las clases sentado.

Otra de las aportaciones valiosas de Weierstrass fue la creación de un seminario de matemáticas en la Universidad de Berlín en 1860. Kummer y Weierstrass presentaron la solicitud al ministro de Cultura, Moritz von Bethmann-Hollweg, que incluía dos objetivos: primero, preparar mejor a los estudiantes para ser profesores, dando un conocimiento más profundo de las matemáticas, y segundo, darles experiencia directa para obtener de forma independiente nuevos descubrimientos matemáticos.

El número ocho de la regulación del seminario de matemáticas de la Universidad de Berlín describía que los seminaristas tenían que participar en unos semina-

rios-tutorías presentando una parte de su investigación tanto de forma oral como escrita. La parte oral a veces era una discusión abierta sobre la resolución de problemas matemáticos seleccionados propuestos por los directores o bien por los propios seminaristas. Según Weierstrass, solo la experiencia de la investigación en generar nuevo conocimiento podía iluminar «los fundamentos y la claridad» de las matemáticas, lo cual era vital para sobresalir en la enseñanza y en el aprendizaje de la disciplina.

En el seminario de matemáticas, que duró unos veinte años, el número de participantes estaba limitado a doce por año y para entrar en él tenían que presentar un artículo o bien pasar un examen. Los seminaristas tenían a su disposición una muy buena biblioteca (con obras de Abel, Cauchy, Euler, Monge y Poisson, entre otros), ya que la idea era trabajar –siempre que fuera posible– con las fuentes originales. También estaban suscritos a las revistas de matemáticas más importantes del siglo XIX como *Journal de Crelle*, *Journal de*



MÉTODO

Ernst Kummer y Leopold Kronecker formaron con Karl Weierstrass el triunvirato que consiguió que la Universidad de Berlín se convirtiese en un centro de gran prestigio para los estudios de matemáticas.

Liouville y Archiv der Mathematik und Physik. También había premios de investigación cada año. Así fue como, a través de este seminario de matemáticas, los buenos estudiantes fueron reconocidos y ayudados. Entre los participantes encontramos numerosas figuras relevantes como Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) y Wilhelm Killing (1847-1923).

Como había un número tan pequeño de seminaristas, Emil Lampe (1840-1918), Karl Hermann Amanus Schwarz (1843-1921) y otros crearon en paralelo en noviembre de 1861 un grupo llamado Unión Matemática, formado por estudiantes que organizaba conferencias, debates y que resolvían problemas para mejorar el conocimiento matemático. La Unión, que empezó con doce miembros y hacia 1880 ya tenía unos ochenta, se convirtió en un modelo para otras universidades alemanas. Weierstrass asistía también a las conferencias y a las reuniones de la Unión participando activamente y debatiendo sobre los problemas matemáticos planteados.

Las ideas de Weierstrass sobre la enseñanza-investigación de las matemáticas, que se revelan totalmente actuales, quedaron bien reflejadas en su conferencia del 15 de octubre del 1873, al ser nombrado rector de la Universidad de Berlín. Weierstrass señalaba la importancia de la selección de materiales y del énfasis en los puntos más relevantes en la enseñanza de los profesores universitarios:

El éxito en la instrucción académica depende en gran medida de la guía continua del profesor al alumno en algunas investigaciones. Eso, sin embargo, no se produce solo mediante la dirección pedagógica sino principalmente a

través de la disposición de los materiales y el énfasis, la exposición de las lecciones del profesor sobre la disciplina permite al alumno discernir las ideas principales de forma apropiada. Así, el pensador plenamente familiarizado avanza lógicamente desde la madura y previa investigación y consigue nuevos resultados o mejores fundamentos que los que existen.

(Weierstrass, 1894-1927, p. 335)

En esta conferencia, Weierstrass explicaba también que el profesor tiene que dar a conocer los caminos que no alcanzan el éxito o bien que se intuyen, sin esconder las dificultades o los errores cometidos:

A continuación [el profesor] no debe dejar de determinar barreras aún no cruzadas por la ciencia y señalar algunas posiciones desde las que sería posible un mayor progreso. Un [profesor universitario] tampoco debe negar al alumno una visión más profunda del progreso de sus propias investigaciones, ni debe permanecer en silencio sobre sus propios errores del pasado o [sobre sus] decepciones.

(Weierstrass, 1894-1927, p. 336)

«WEIERSTRASS SE DEDICÓ DURANTE TODA SU VIDA A FUNDAMENTAR RIGUROSAMENTE UNA TEORÍA COMPLETA Y COHERENTE DE LAS FUNCIONES ABELIANAS»

Los discípulos de Weierstrass, que se pueden consultar en la página web del *Mathematics Genealogy Project*, fueron numerosos: 41 directos y 27.071 descendientes. Algunas de las figuras cuya tesis dirigió Weierstrass son muy conocidas. Sirvan como ejemplo Leo Königsberger (1837-1921), Georg Cantor (1845-1918), Lazarus Fuchs (1833-1902), Sonia Kovalevskaja (1850-1891) y Schwarz. Otras figuras conocidas que asistieron a sus cursos fueron Paul Bachmann (1837-1920), Felix Klein (1849-1925), Adolf Hurwitz (1859-1919), Mittag-Leffler y Sophus Lie, entre otros.

Una discípula singular fue Sonia Kovalevskaja, que a los veinte años fue desde Heidelberg a Berlín para estudiar matemáticas con Weierstrass. Este se convenció en seguida del talento de Sonia, aunque, como era una mujer, no consiguió ser admitida en el programa de doctorado de la Universidad de Berlín. Weierstrass le dio clases particulares hasta el verano de 1874, cuando obtuvo el doctorado en la Universidad de Göttingen. Este ejemplo nos muestra una vez más la importancia para Weierstrass de hacer avanzar el conocimiento salvando las dificultades que, en este caso, ponía la sociedad.

Weierstrass era muy estimado por sus discípulos y el 31 de octubre de 1885, cuando cumplió setenta años, le prepararon una gran fiesta de aniversario en la que le regalaron una medalla conmemorativa y un álbum de fotos con dedicatorias. A la fiesta asistieron 320 figuras matemáticas de toda Europa y todas se encuentran fotografiadas en el álbum, muchas con dedicatorias entrañables. En 1892 Weierstrass fue premiado con la medalla Helmholtz por la Academia de Ciencias de Berlín y tres años después, en 1895, con la medalla Copley, el más alto galardón de la Royal Society de Londres. Aquel mismo año, con motivo de su octogésimo aniversario, se le regaló también un retrato que fue solemnemente descubierto en la Galería Nacional de Berlín. Pasó los tres últimos años de su vida en silla de ruedas, inmóvil y dependiente. Murió en Berlín de una neumonía el 19 de febrero de 1897, cuando tenía 82 años.

■ CONTRIBUCIONES DE WEIERSTRASS

Aunque los cursos de Weierstrass fueron publicados por sus alumnos a lo largo de su vida, viendo que todo su legado peligraba a causa de las diferencias con Kronecker, decidió editar él mismo sus obras completas. En 1894 editó el primer volumen, el segundo, el año 1895, y tras su muerte sus discípulos Johannes Knoblauch (1855-1915) y Georg Hettner (1854-1914) editaron hasta siete volúmenes, el último en 1927. Finalmente, todos fueron reimprimidos en 1967. Hay que señalar el interés de Weierstrass para que todo lo que se publicase derivado de sus investigaciones fuera cierto y riguroso. Para él lo más importante no era la autoría de la publicación, ni



Entre todos los discípulos de Weierstrass, destacó la matemática Sonia Kovalevskaja (1850-1891).

**«UNA DISCÍPULA SINGULAR
FUE SONIA KOVALEVSKAIA,
QUE A LOS VEINTE AÑOS
FUE DESDE HEIDELBERG
A BERLÍN PARA ESTUDIAR
MATEMÁTICAS CON
WEIERSTRASS»**

que se le citara, sino que se pudiese hacer progresar verdaderamente el conocimiento científico. Esta vertiente generosa hacia la investigación no era ni mucho menos habitual en la época.

Por lo que respecta a sus artículos, como ejemplo citaremos el titulado «Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques» (“Observaciones sobre algunos puntos de la teoría de funciones analíticas”) de 1881. Weierstrass aclara algunos puntos sobre sus ideas de la teoría de funciones analíticas matizando la relación intuitiva entre continuidad y derivabilidad.

En la teoría de las funciones analíticas primero trabajaron Abel y Jacobi. Más tarde, Augustin Louis Cauchy (1789-1852) impuso que las funciones analíticas deben tener una derivada continua y Bernhard Riemann (1826-1866) dio a la imagen geométrica un papel dominante y la función, que hay que representar, es la que transforma las figuras. Weierstrass, en cambio, se sitúa en un punto de partida diferente: la serie de potencias, «el elemento de la

función» que está confinado en un círculo de convergencia (Dugac, 1973; Poincaré, 1899). Así Weierstrass ya recuerda que su camino es diferente de las vías ordinarias de desarrollo de la teoría de funciones.

En mis lecciones sobre los elementos de la teoría de funciones, he puesto en evidencia, desde el principio, dos teoremas que no concuerdan nada con las vías ordinarias, a saber: I) Si una función de una variable real es continua, no se puede concluir que, por los varios valores de la variable, tenga una derivada determinada; menos aún se puede concluir que posea siempre una derivada continua, por lo menos en unos intervalos definidos. II) Si una función de una variable compleja está definida por una cierta región de esta última, no es siempre posible continuarla más allá de los límites de esta región: en otros términos, existen funciones monógenas de una variable que tienen esta propiedad, que los puntos del plan de la variable, por los que no puede estar definida, no son solamente puntos aislados, sino que forman líneas y superficies.

(Weierstrass, 1881, pp. 178-179)

Weierstrass cita en este artículo su famoso ejemplo de función continua no diferenciable en ningún punto y aclara también que la demostración concreta de la no derivabilidad la había enviado por carta a Du Bois-Rey-

mond y éste la había publicado en 1875, aunque Weierstrass ya la había presentado, el 18 de junio de 1872, en la Academia de Ciencias de Berlín.

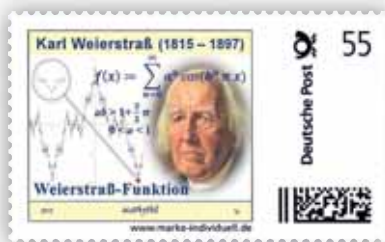
Dugac (1973) afirma que Weierstrass «raramente empleaba la geometría y cuando lo hacía, lo hacía solo a título de ilustración». También su estudiante Salvatore Pincherle (1853-1936), en el curso de Weierstrass que publicó en 1880, señalaba que, aunque intuitivamente pareciera que toda función continua admite derivada, a veces las representaciones geométricas engañan a nuestros ojos y este teorema se puede rebatir con los ejemplos analíticos de funciones no derivables a ningún punto encontrados en aquel tiempo. A continuación, Pincherle daba otro ejemplo de función continua no derivable a ningún punto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot x)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)}$$

Pincherle añadía, sin demostración ni representación, que esta función es continua y finita para todos los valores reales de x de $-\infty$ a $+\infty$, y no tiene ninguna derivada (Pincherle, 1880, p. 71). La exigencia de un método de demostración exclusivamente aritmético sin depender de la evidencia geométrica dentro del modelo de rigor weierstrassiano es lo que se convirtió en su aritmetización del análisis matemático.

La investigación sobre la obra de Weierstrass aporta, pues, varios elementos de discusión sobre la comprensión de las ideas matemáticas: ¿Intuicionismo o logicismo? ¿En qué casos? Henri Poincaré (1899), cuando comparaba a Riemann y a Weierstrass, explicaba que Riemann empleaba como instrumento la intuición, así lo veía todo de una ojeada, como un viajero que mira desde arriba de una montaña. En cambio, Weierstrass tomaba como instrumento el análisis y mostraba todos los rincones con claridad. Entonces uno se pregunta, ¿se comprende mejor una demostración haciendo todas las operaciones elementales y detalladas? ¿No hace falta la intuición? ¿No hace falta la geometría? ¿O es que hacen falta las dos vertientes para entender las demostraciones y avanzar en el conocimiento?

Otras preguntas que uno se puede hacer referidas más específicamente al pensamiento matemático de Weierstrass son: ¿La contribución de Weierstrass al desarrollo del análisis matemático ha permitido nuevos resultados?



Sello conmemorativo que ilustra el famoso ejemplo de función continua no diferenciable en ningún punto de Karl Weierstrass.

«HAY QUE SEÑALAR EL INTERÉS DE WEIERSTRASS PARA QUE TODO LO QUE SE PUBLICASE DERIVADO DE SUS INVESTIGACIONES FUERA CIERTO Y RIGUROSO.»

El límite, las derivadas, la noción de vecindad, tal como lo presenta Weierstrass, ¿son determinantes para avanzar en el cálculo? Las palabras de David Hilbert sobre el significado de estas contribuciones, en el homenaje a Weierstrass con motivo de los cien años de su nacimiento, son de gran ayuda para reflexionar:

Weierstrass, mediante una crítica conducida con magistral profundidad, proveyó al Análisis Matemático de una base sólida. Al dilucidar entre otras cuestiones sobre las nociones de mínimo, de función, de derivada, ha eliminado las objeciones que aún suscitaba el cálculo infinitesimal, limpiándolo de todas las ideas confusas sobre lo infinitamente grande y lo infinitamente

pequeño y ha superado definitivamente las dificultades que provienen de las propias nociones de infinitamente grande y de infinitamente pequeño.

(Hilbert, 1926, p. 91) Ⓞ

REFERENCIAS

- Biermann, K. R. (1970-1990). Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm. En C. C. Gillispie (Ed.), *Dictionary of Scientific Biography* (pp. 219-224). Nueva York: Scribner's.
- Bölling, R. (1994). *Das Fotoalbum für Weierstrass / A PhotoAlbum for Weierstrass* (German Edition). Braunschweig: Vieweg.
- Calinger, R. (1996). The mathematics seminar at the University of Berlin: Origins, founding and the Kummer-Weierstrass years. In R. Calinger (Ed.), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching* (pp. 153-176). Washington: The Mathematical Association of America.
- Dugac, P. (1973). Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, 10(1-2), 41-176. doi: 10.1007/BF00343406
- Hilbert, D. (1926). Sur l'infini. *Acta Mathematica*, 48, 91-122. doi: 10.1007/BF02629757
- Mittag-Leffler, G. (1902). Une page de la vie de Weierstrass. En *Compte rendu du deuxième Congrès International des mathématiciens* (pp. 131-153). Paris: Elibron Classics.
- Pincherle, S. (1880). *Saggio di una introduzione alla Teoria delle Funzioni Analitiche secondo i principi del Prof. C. Weierstrass compilato dal Dott. S. Pincherle*. Napoli: Benedetto Pellerano Editore.
- Poincaré, H. (1899). L'œuvre mathématique de Weierstrass. *Acta Mathematica*, 22, 1-18. doi: 10.1007/BF02417867
- Weierstrass, K. (1854). Zur Theorie der Abelschen Functionen. *Journal de Crelle*, 47, 289-306. doi: 10.1515/crll.1854.47.289
- Weierstrass, K. (1856). Theorie der Abelschen Functionen. *Journal de Crelle*, 52, 285-380. doi: 10.1515/crll.1856.52.285
- Weierstrass, K. (1881). Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 5 (1), 157-183.
- Weierstrass, K. (1894-1927). Ansprache bei der Übernahme des Rektorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15 October 1873. In Weierstrass, Karl, 1815-1897, Knoblauch, Johannes, 1855-1915, Hettner, Georg, 1854-1914, Rothe, Rudolf Ernst, ed. 1873-1942, (Eds.), *Mathematische werke von Karl Weierstrass. Herausgegeben unter mit wirkung einer von der Königlich preussischen akademie der wissenschaften eingesetzten commission* (pp. 331-349). Berlin: Mayer & Müller.

M^a Rosa Massa Esteve. Profesora del departamento de Matemáticas de la Universitat Politècnica de Catalunya. Centro de Investigación para la Historia de la Técnica de la Universitat Politècnica de Catalunya.