MONOGRÀFIC
MÈTODE SCIENCE STUDIES JOURNAL (2017). Universitat de València.
DOI: 10.7203/metode.8.9076
Article rebut: 13/10/2016, acceptat: 28/02/2017.

ANTICS REPTES MATEMÀTICS

ANTECEDENTS DELS PROBLEMES DEL MIL·LENNI

SERGIO SEGURA DE LEÓN

Els problemes del mil·lenni de l'Institut Clay de Matemàtiques són un estímul per a la investigació matemàtica. L'objectiu d'aquest article és mostrar alguns precedents de reptes que també han estat estímuls per a demostrar resultats interessants. Amb aquesta excusa, mostrem tres moments de la història de la matemàtica que han estat importants per a desenvolupar noves línies de recerca. Analitzem breument el desafiament de Tartaglia, que va significar conèixer una fórmula per a l'equació de tercer grau; el problema de la corba de descens més ràpid de Johann Bernoulli, que va donar origen al càlcul de variacions; i la incidència dels problemes que plantejà David Hilbert el 1900, centrant-nos en el primer problema de la seua llista: la hipòtesi del continu.

Paraules clau: equació cúbica, fórmula de Cardano-Tartaglia, braquistòcrona, problemes de Hilbert, hipòtesi del continu.

L'Institut Clay de Matemàtiques ha triat set problemes matemàtics i ofereix un milió de dòlars a qui en resolga algun. Com que allò de fer reptes matemàtics no és inèdit, en aquest article volem mostrar diversos desafiaments que han tingut lloc al llarg de la història. No hi incloem controvèrsies com ara la de Newton-Leibniz, la de D'Alembert-Bernoulli o la de Cantor-Kronecker. Així mateix, deixarem a banda els premis que han convocat les acadèmies de ciències (com ara la de França o la de Prússia des del segle XVIII).

Mostrarem, doncs, certs aspectes del desenvolupament de les matemàtiques des d'una perspectiva especial. Referències clàssiques en història de la matemàtica són Carl Benjamin Boyer (1989) i Morris Kline (1972). Un altre llibre, més divulgatiu, és obra de William Wade Dunham (1990). A més, una font molt valuosa de material històric (fonamentalment biografies) és el lloc web[1] de la Universitat de St. Andrews (Escòcia).

«DESPRÉS DELS ESFORÇOS D'UN BON GRAPAT DE MATEMÀTICS AL LLARG DE MÉS DE DOS SEGLES, NIELS ABEL VA DEMOSTRAR QUE ERA IMPOSSIBLE TROBAR LA SOLUCIÓ GENERAL D'UNA EQUACIÓ DE GRAU MAJOR QUE QUATRE MITJANÇANT RADICALS»

EL DESAFIAMENT DE TARTAGLIA

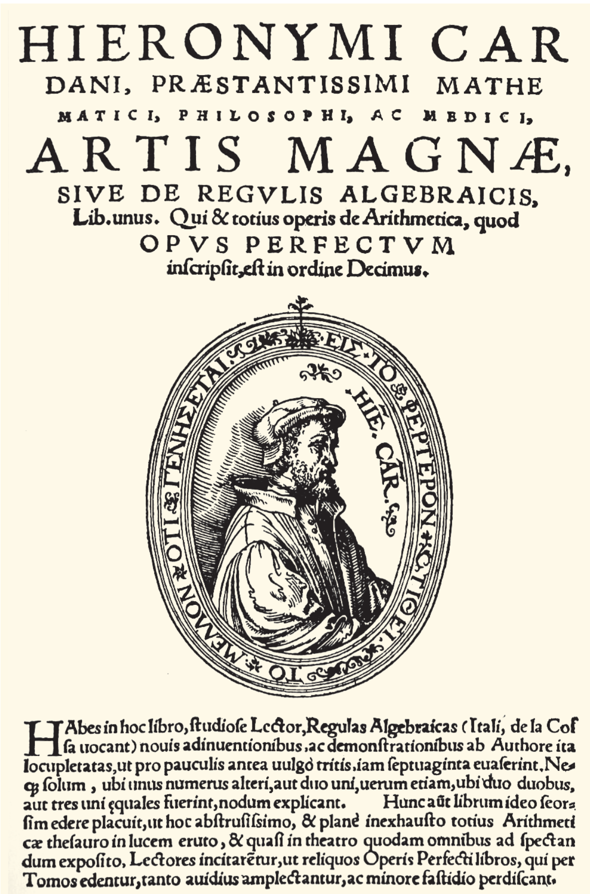
Ja els antics matemàtics de Mesopotàmia van formular una sèrie d'instruccions (sense cap explicació) per a trobar solucions concretes a problemes que avui es poden descriure mitjançant una equació de segon grau. Parlant en termes moderns, si la incògnita verifica l'equació $x^2+px+q=0$, aleshores la solució ve donada per

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Cal dir que no només hem utilitzat la notació moderna; el llenguatge emprat és més aviat una llicència, perquè en l'antiguitat p i q són sempre quantitats positives i se cerquen solucions positives.

En principi, l'equació pot tindre associat el càlcul d'una àrea, per això apareix el quadrat. Per tant, té sentit considerar equacions de tercer grau associades al càlcul de volums. Efectivament, l'equació cúbica es va plantejar i, fins i tot, va ser resolta geomètricament. Aquest resultat és degut al matemàtic persa Omar Khayyam (1048-1131), qui utilitzava seccions

[1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

MÈTODE

Niccolò Fontana, de malnom Tartaglia, va explicar a Girolamo Cardano com resoldre les equacions de tercer grau, sota la promesa de mantenir la regla en secret. Però Cardano no ho va complir, i el 1545 va publicar la fórmula en el llibre *Ars Magna*.

còniques (és a dir, el·lipses, paràboles i hipèrboles) la intersecció de les quals proporcionava les arrels. D'altra banda, amb paciència, sempre es poden aproximar les arrels de qualsevol polinomi. Per exemple, Leonardo de Pisa (*ca*. 1170-1250), també anomenat Fibonacci, va expressar de manera aproximada l'arrel d'una equació cúbica. El cas és que al final de l'època medieval ja hi havia mètodes per a calcular geomètricament o aproximadament arrels d'equacions cúbiques. No obstant això, no es coneixia cap expressió per a obtenir-les i, segons el parer de l'influent Luca Pacioli (1445-1517), allò de trobar una fórmula per a una equació general de tercer grau era tan difícil com quadrar un cercle.

«LA PUBLICACIÓ D'UN ESCRIT D'ÉVARISTE GALOIS EL 1846 POT CONSIDERAR-SE EL PUNT DE PARTIDA DE L'ÀLGEBRA MODERNA»

La disputa amb l'equació cúbica com a tema fonamental es va produir el 1535. En aquell temps se celebraven molts desafiaments amb apostes. Un dels protagonistes de la disputa era Niccolò Fontana (1500-1557), de malnom Tartaglia ("tartamut"). Va arribar a Venècia el 1534 i va guanyar fama de bon matemàtic. Sembla que deia que podia resoldre alguns casos concrets de la cúbica. És aleshores quan Antonio Maria del Fiore va reptar Tartaglia. Cada contrincant proposà una llista de trenta problemes per a solucionar en un interval de temps fix, i aquell que en resolgués menys pagaria un dinar a tants amics del guanyador com problemes haguera solucionat aquest. La qüestió és que Del Fiore coneixia una fórmula per a resoldre una classe d'equacions de tercer grau, que li havia revelat Scipione del Ferro (1465-1526) poc abans de morir. Per això, tots els problemes que va proposar a Tartaglia eren equacions cúbiques incompletes. Tartaglia comprengué que Del Fiore tenia una fórmula i la cercà fins a descobrir-la. El dia en què es decidia el resultat, Tartaglia havia solucionat tots els problemes proposats per Del Fiore, mentre que aquest no n'havia resolt cap.

En termes actuals, l'equació cúbica que va estudiar Tartaglia era $x^3+px+q=0$, tot i que ell sempre escrivia nombres en lloc dels coeficients p i q. La solució ve donada per l'anomenada fórmula de Cardano-Tartaglia, segons la qual x és igual a:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Després de la disputa era evident per tothom que Tartaglia disposava d'una regla per a la cúbica, però no la va publicar. En aquell moment aparegué Girolamo Cardano (1501-1576) pressionant Tartaglia perquè li digués com resoldre les equacions de tercer grau. Finalment Tartaglia li va comunicar la regla en clau, sota la promesa de mantenir-la en secret. Cardano no ho va complir i el 1545 va publicar la fórmula en el llibre *Ars Magna*. A més de la solució de Tartaglia, apareix la regla per trobar una solució de l'equació general $x^3+nx^2+pq+q=0$, que Cardano havia obtingut en col·laboració amb el seu deixeble Ludovico Ferrari (1522-1565). Més sorprenent és que en el llibre es trobava la solució d'una equació general de quart grau; l'havia descoberta Ferrari amb tècniques semblants a aquelles que havien après per resoldre la cúbica.

Totes aquestes investigacions són el punt de partida de dues línies de recerca matemàtica. D'una banda, va començar a plantejar-se trobar una fórmula per a l'equació de cinquè grau. Després dels esforços d'un bon grapat de matemàtics al llarg de més de dos segles, entre els quals cal destacar Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), el noruec Niels Abel (1802-1829) va demostrar que era impossible trobar la solució general d'una equació de grau major que quatre mitjançant radicals. La història no s'acaba perquè encara faltava saber quan és possible aquesta solució per radicals. Poc abans de morir en un duel, Évariste Galois (1811-1832) va fer un escrit en què provava una teoria de la solubilitat: establia un criteri per, donada una equació de grau primer, saber si és o no resoluble per radicals. La publicació d'aquest escrit de Galois el 1846 pot considerar-se el punt de partida de l'àlgebra moderna.

D'altra banda, hi ha un cas molt important en la fórmula de l'equació cúbica que és el que apareix quan $(q/2)^2+(p/3)^3<0$. Cardano i Ferrari el van anomenar «cas irreductible». És conegut que l'equació cúbica sempre té arrels. Què passa si apliquem la fórmula també en aquest cas? Simplement apareixen expressions que involucren arrels cúbiques i quadrades de nombres negatius. Per exemple, suposem que ja sabem que una arrel de $x^3-15x-4=0$ és $x=4$, però intentem aplicar la regla, aleshores obtindrem:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-121}$$

Fent substitucions formals es pot deduir que:

$$\left(2\pm\sqrt{-1}\right)^3=2\pm\sqrt{-121}$$

I conseqüentment arribem a:

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-121}\\&=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4\end{aligned}$$

La qüestió que posa de manifest aquest càlcul és que la manipulació d'arrels quadrades de nombres negatius pot ser útil. És l'origen dels nombres complexos. Així mateix, Cardano i Ferrari es van adonar que, utilitzant aquests nombres estranys, tota equació cúbica té tres arrels i tota equació quàrtica en té quatre. És la versió inicial de l'anomenat «teorema fonamental de l'àlgebra»: tot polinomi de grau n té n arrels complexes (tenint en compte les arrels repetides). Més endavant, la investigació en nombres complexos donarà lloc a la teoria de funcions de variable complexa, les propietats de les quals són ben diferents de les funcions de variable real (per exemple, tota funció derivable en un disc es pot representar per una sèrie de potències).

LA CORBA DE DESCENS MÉS RÀPID

Un dels precursors del càlcul diferencial, Pierre de Fermat (1601-1665), va descobrir un mètode per a calcular màxims i mínims: actualment diríem que si un punt x és màxim o mínim d'una determinada funció suau f aleshores verifica $f'(x)=0$. Aquest mètode l'aplicà a l'estudi dels raigs de llum, junt amb el principi que afirma que la llum viatja entre dos punts recorrent el camí que requereix menys temps. Així va deduir la llei de la reflexió i de la refracció (llei de Snell), l'última suposant que la llum es mou més lentament en un medi més dens. És significatiu que la mateixa llei de Snell va ser utilitzada més tard per Johann Bernoulli (1667-1748), considerant un medi òptic no homogeni consistent en capes paral·leles superposades horitzontalment de densitat variable, per trobar la corba de descens més ràpid. La idea era que la llum en aquest medi anara precisament per la corba que cercava i que va anomenar «braquistòcrona».

Sailko/Wikimedia

Podríem dir que la corba de descens més ràpid és la que permet fer el disseny òptim d'un tobogan. Deixant caure boles per un pla inclinat i per una circumferència, Galileu Galilei es va adonar que el descens era més ràpid per la segona. En la imatge, aparell fabricat per Francesco Spighi que permet comparar la caiguda d'una bola per una cicloide i per una recta. Es pot contemplar al Museu Galileu de Florència.

Quina és la corba de descens més ràpid? La definició formal és la següent: donats dos punts A i B en un pla vertical de manera que A estiga a més altura que B, la corba de descens més ràpid és la que segueix un pes puntual quan es desplaça de A a B en el menor temps possible sota l'efecte de la gravetat. En altres paraules, la corba de descens més ràpid és la que permet fer el disseny òptim d'un tobogan. La primera idea que es pot tenir és que la corba és en realitat una recta perquè la recta és la corba més curta entre dos punts. Però Galileu Galilei (1564-1642) es va adonar que això no era així, ja que en deixar caure boles per un pla inclinat i per una circumferència observà que el descens per la circumferència era més ràpid.

Per fer-nos una idea de la qüestió, considerem els punts $A=(0,0)$ i $B=(1,-1)$. Volem esbrinar, entre totes les funcions $y=f(x)$ que verifiquen $f(0)=0$ i $f(1)=-1$, aquella que fa mínim el temps de caiguda d'un pes (T) que segueix la gràfica de la funció. Per un raonament físic s'arriba a la quantitat que cal minimitzar:

$$T=\int_0^1 \frac{\sqrt{1+f'\left(x\right)^2}}{\sqrt{-2gf\left(x\right)}}\,dx$$

on g denota la constant de la gravetat. Ara seguirem Galileu i calcularem el temps emprat al llarg de diverses corbes. Per a la recta $f(x)=-x$, obtenim

$$T=\int_0^1 \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{2gx}}\,dx=\frac{2}{\sqrt{g}}=0{,}6388$$

per a l'arc de circumferència $f\left(x\right)=-\sqrt{1-\left(1-x\right)^2}$,

$$T=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2g}\,\left(1-\left(1-x\right)^2\right)^{3/4}}\,dx=0{,}5922$$

És a dir, Galileu tenia raó. Ara bé, tampoc la circumferència és la braquistòcrona perquè, en realitat, el mínim s'assoleix quan $T=0{,}5832$.

En les pàgines de la revista alemanya *Acta Eruditorum* de juny del 1696, Johann Bernoulli va proposar a la comunitat matemàtica el repte de trobar la braquistòcrona. Ell afirmava que coneixia la resposta i que es tractava d'una corba ben coneguda pels geòmetres. Al maig del 1697, Bernoulli publicà que quatre matemàtics havien aconseguit una prova que la braquistòcrona era la cicloide; és a dir, la corba que ve definida per un punt d'una circumferència que gira sense lliscar sobre una línia recta (per exemple, un punt del neumàtic de la roda d'un cotxe sobre el carrer). Eren Gottfried Wilhelm Leibniz, Jakob Bernoulli, el marquès de L'Hôpital Guillaume François Antoine i un matemàtic anònim; cadascun havia fet una demostració diferent.

L'escrit del desafiament semblava una invitació especialment adreçada a Isaac Newton (1643-1727), per la qual cosa no és sorprenent que haguera de respondre al repte. Hi ha una llegenda que diu que va rebre el problema quan tornava, cansat, de treballar tot el dia a la casa de la moneda i es va concentrar dotze hores fins resoldre'l: és el problema que li costà tota una nit a Newton. La resposta la va trametre anònimament, però Bernoulli en veure-la va endevinar l'autor i exclamà que coneixia que era de Newton com coneixia «el lleó per les seues urpes».

El problema de la braquistòcrona és un dels primers exemples del que després esdevindria càlcul de variacions. Es tracta de minimitzar una quantitat, en el nostre cas el temps, que no depèn d'un nombre finit de variables independents sinó de la forma global de la corba. Un problema típic de càlcul de variacions és trobar la funció que minimitza una integral com

$$\mathcal{F}\left[f\right]=\int_a^b F\left(x,\ f\left(x\right),\ f'\left(x\right)\right)\,dx$$

per a una certa funció $F(x, y, y')$. Allò que es pot pensar és aplicar la idea de Fermat, de qui ja hem parlat: derivar (d'alguna manera) la «funció» $\mathcal{F}$ i fer $\mathcal{F}'[f]=0$ per obtenir una condició sobre la funció f. Els estudis de Leonhard Euler (1707-1783) i Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) van descobrir que aquest procediment portava a la condició:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=0$$

Els raonaments, però, no eren rigorosos i hem d'esperar al segle XIX per a tenir un fonament satisfactori del càlcul de variacions de la mà de Karl Weierstrass (1815-1897) i David Hilbert (1862-1943).

Mentrestant, els matemàtics havien plantejat problemes de minimització d'integrals múltiples, com ara les de la teoria del potencial que busca minimitzar la integral

$$\iiint_\Omega \left|\,\nabla u\left(x,y,z\right)\right|^2 d\left(x,y,z\right)$$

entre totes les funcions u, amb derivades parcials contínues, que verifiquen una condició a la frontera del domini Ω. Per la seua part, els físics havien aplicat les idees del càlcul de variacions a la mecànica i així va sorgir la mecànica analítica amb les formulacions lagrangiana i hamiltoniana. Per sota surava una generalització de la idea de Fermat: la natura economitza en les seues accions i, conseqüentment, en tots els fenòmens naturals existeix una quantitat (o quantitats) que ha de ser minimitzada.

ELS VINT-I-TRES PROBLEMES DE HILBERT

L'estiu del 1900, David Hilbert era quasi al zenit de la seua carrera acadèmica. El seu currículum contenia la solució del problema de Gordon sobre invariants de certes formes algebraiques, el nou impuls que havia

L'any 1900 el matemàtic David Hilbert va proposar una llista de vint-i-tres problemes no resolts de tots els camps de la matemàtica com a exemples de qüestions que serien fonamentals en el segle que començava. En la imatge, Hilbert –fila de davant, a la dreta– amb uns amics.

«UNA PART CONSIDERABLE DEL DESENVOLUPAMENT MATEMÀTIC DEL SEGLE XX TÉ COM A ORIGEN LA LLISTA DE PROBLEMES DE DAVID HILBERT»

donat a la teoria algebraica de nombres, l'axiomatització de la geometria o la justificació del principi de Dirichlet sota certes hipòtesis. Era un dels més reputats matemàtics de l'època. I en aquell moment va impartir una conferència en el Segon Congrés Internacional de Matemàtics celebrat a París.

En la conferència titulada «Problemes matemàtics» (es pot consultar en Hilbert, 1902) posà de manifest la seua filosofia de les matemàtiques, plena d'optimisme. A més, va proposar una llista de vint-i-tres problemes no resolts de tots els camps de la matemàtica com a exemples de qüestions que serien fonamentals en el segle que començava. La llista va concentrar els esforços de nombrosos matemàtics i esdevingué molt influent (sens dubte per l'autoritat de Hilbert). En resum, aquell que resolia un dels problemes, assolia una sòlida reputació.

Les matemàtiques del nou segle no seguiren exactament les línies de recerca marcades per Hilbert. Fins i tot ell no va poder endevinar les noves àrees que aparegueren molt prompte i que, en alguns casos, el mateix Hilbert va ajudar a desenvolupar, com ara la teoria espectral. No obstant això, una part considerable del desenvolupament matemàtic del segle XX té com a origen la llista de Hilbert. Farem una breu introducció al primer problema de la llista en la següent secció.

LA HIPÒTESI DEL CONTINU

A finals del segle XIX, Georg Cantor (1845-1918) va analitzar l'infinit de manera sistemàtica. En la seua teoria, dos conjunts (finits o infinits) tenen el mateix cardinal si existeix una bijecció entre ells. Observeu que, quan el conjunt és finit, el seu cardinal és el nombre d'elements que té.

Aplicant la seua definició als conjunts $\mathbb{N}$, de tots els enters positius, i $\mathbb{Q}$, de tots els nombres racionals (els que es poden escriure com m/n, on m i n són enters, i $n \neq 0$), va provar que ambdós tenen el mateix cardinal. Es tracta del cardinal infinit més petit que denotà per $\aleph_0$. Quan un conjunt té cardinal $\aleph_0$ com que hi ha una bijecció amb els enters positius, els membres del conjunt es poden escriure com una successió. No és massa difícil entendre la demostració que el cardinal de $\mathbb{Q}$ és $\aleph_0$ quan es coneix el procediment. Considerem nombres racionals m/n que siguen una fracció irreductible amb m i n positius i tals que la suma $m+n$ és una quantitat fixa. Si $m+n=2$, aleshores tenim:

$$\frac{1}{1} = 1$$

Si $m+n=3$, tenim:

$$\frac{1}{2} \text{ i } \frac{2}{1} = 2$$

Si $m+n=4$, tenim:

$$\frac{1}{3} \text{ i } \frac{3}{1} = 3$$

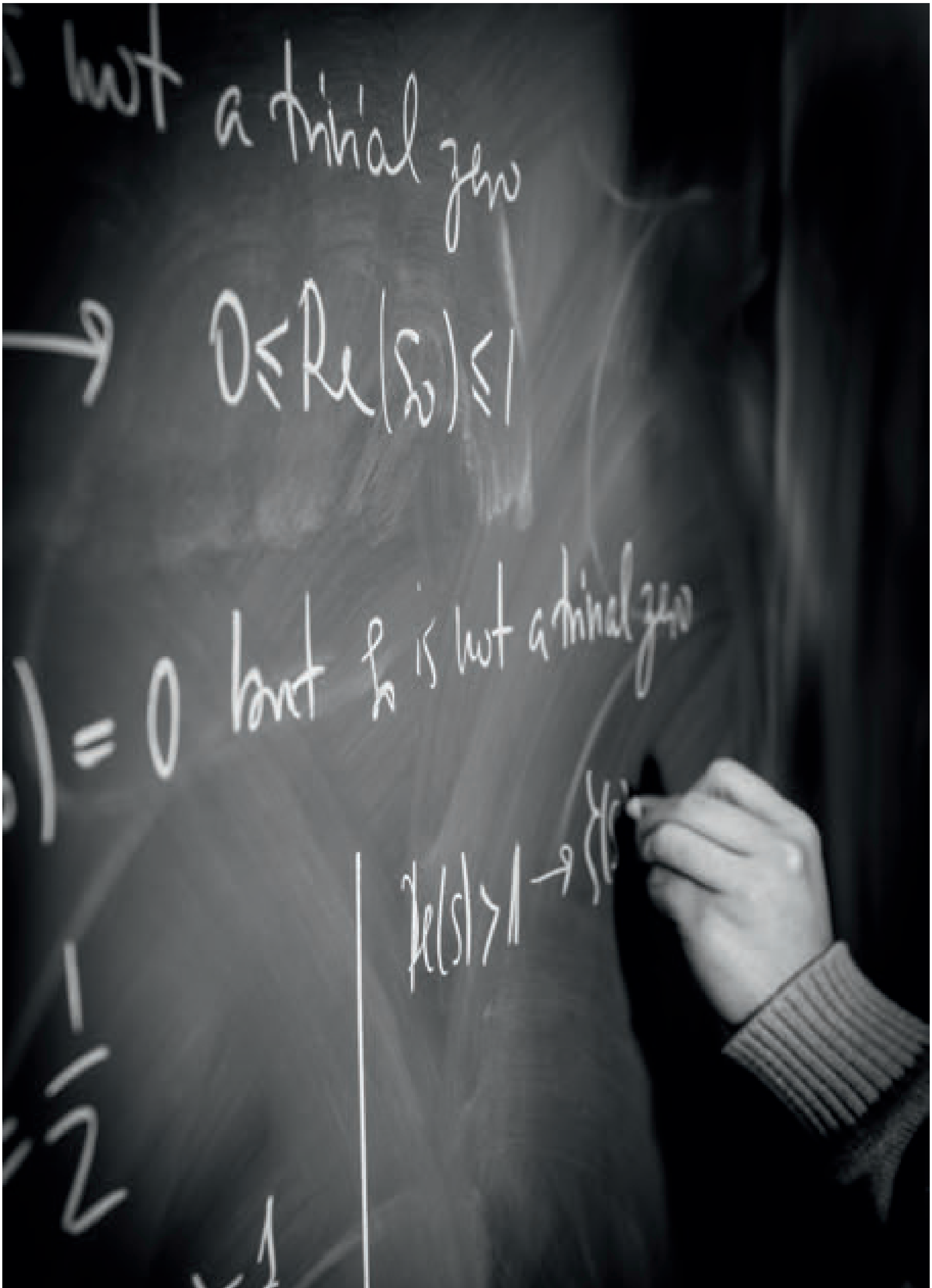
$\frac{2}{2} = 1$ no és irreductible. Si $m+n=5$, tenim:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \text{ i } \frac{4}{1} = 4$$

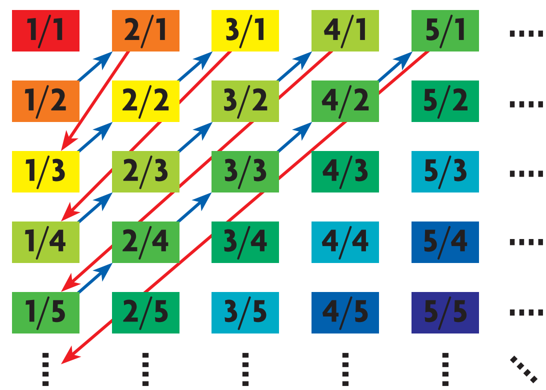
És evident que, continuant el procés per $m+n=6, 7...$ inclourem tots els nombres racionals positius (veure figura de la pàgina següent).

Cal incloure també el 0 i els negatius, per la qual cosa els intercalarem entre els positius. Els primers termes de la successió que conté tots els nombres racionals són:

$$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3,\ldots$$



Ana Yturralde



Sergio Segura

Procés per a expressar els racionals positius com una successió.

Posteriorment Cantor va demostrar que el conjunt de totes les arrels de polinomis amb coeficients enters té el mateix cardinal.

La qüestió canvià quan va veure que el conjunt $\mathbb{R}$ del nombres reals (aquells que es poden escriure amb decimals encara que siguen irracionals) és major que $\aleph_0$. La demostració es fa per reducció a l'absurd. Cantor va suposar que tots els nombres entre 0 i 1 es podien escriure en una successió i va trobar un nombre que no era de la successió. Potser aquest és el primer teorema significatiu de la seua teoria, el qual mostra que hi ha diferents tipus d'infinit. Conseqüència d'aquest fet és que la majoria dels nombres reals són irracionals. Més encara, la majoria dels nombres reals no són arrels de cap polinomi amb coeficients enters. Tenint en compte que es coneixien pocs nombres d'aquest tipus, el resultat fou molt sorprenent per a l'època.

Aprofundint en la seua anàlisi, va demostrar que hi ha tants nombres reals com subconjunts de $\mathbb{N}$. No obstant això, no va trobar cap conjunt que tingués un cardinal major que $\aleph_0$ i menor que el de $\mathbb{R}$. Així arribà a la conjectura que el cardinal de $\mathbb{R}$ era el segon cardinal infinit; és la hipòtesi del continu l'enunciat de la qual és: qualsevol subconjunt infinit del conjunt dels nombres reals es pot posar en bijecció amb el conjunt dels nombres naturals o el mateix conjunt dels reals.

Durant els anys següents, es van fer nombrosos esforços per intentar demostrar la conjectura de Cantor sense èxit i Hilbert va posar-ho com el primer problema de la seua llista. La solució vingué a poc a poc, i no és una solució fàcil d'entendre.

El primer pas el va fer Kurt Gödel (1906-1978). El 1940 demostrà que si el sistema axiomàtic habitual de la teoria de conjunts és consistent, llavors continuarà essent així quan la hipòtesi del continu s'agregue al sistema. En altres paraules, la hipòtesi del continu no és contradictòria amb la resta d'axiomes que es consideren en teoria de conjunts. Per tant, no es pot descobrir un conjunt que tinga un cardinal major que $\aleph_0$ i menor que el de $\mathbb{R}$ perquè s'arribaria a una contradicció. Però això no és una demostració de la hipòtesi del continu.

El segon pas és degut a Paul Joseph Cohen (1934-2007), qui el 1963 va demostrar que de fet la hipòtesi del continu és independent dels altres axiomes. En efecte, utilitzant un mètode que anomenà «*forcing*», va veure que si el sistema axiomàtic de la teoria de conjunts és consistent, aleshores ho continuarà sent quan la negació de la hipòtesi del continu s'agregue al sistema. La conclusió és que ni la hipòtesi del continu ni la seua negació es poden demostrar amb el sistema axiomàtic habitual de la teoria de conjunts. Podem afegir un altre axioma que diu que la hipòtesi del continu és certa (o afegir-ne un negant-la). Amb els axiomes actuals tenim un desconeixement total de la qüestió.

D'acord amb Gödel, el problema no s'acaba ací. El que hem vist és que els axiomes de la teoria de conjunts són insuficients per a respondre a la qüestió i han de ser complementats amb uns altres. En el futur, els matemàtics afegiran al sistema nous axiomes. El criteri per afegir-los serà que tindran conseqüències desitjables (segons la nostra intuïció de matemàtics) i no tindran conseqüències no desitjables. Gödel pensava que la conjectura de Cantor era falsa. Amb els nous axiomes es podrà tornar a formular el problema de la hipòtesi del continu.

MÉS ENLLÀ DELS PROBLEMES DE HILBERT

La conferència de Hilbert tingué tal repercussió que, per a commemorar-la, la Unió Matemàtica Internacional va declarar el 2000 Any Internacional de les Matemàtiques i va demanar llistes de problemes a prestigiosos matemàtics, com ara Stephen Smale, qui en va suggerir divuit. Però cap llista ha rebut l'atenció dels premis de l'Institut Clay de Matemàtiques anunciats el 24 de maig del 2000. Com passa amb la llista de Hilbert, conté problemes de totes les grans àrees de la matemàtica. Només un s'ha resolt, la conjectura de Poincaré. En els següents articles es poden trobar breus introduccions a alguns d'aquests problemes: passeu i vegeu.

REFERÈNCIES

Boyer, C. B. (1989). *A history of mathematics*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc.
Dunham, W. (1990). *Journey through genius*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc.
Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 8*, 437–479. doi: 10.1090/S0002-9904-1902-00923-3
Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nova York: Oxford University Press.

Sergio Segura de León. Llicenciat i doctor en Matemàtiques per la Universitat de València (Espanya), ha desenvolupat tota la seua activitat acadèmica al Departament d'Anàlisi Matemàtica d'aquesta institució, on actualment és professor titular. La seua recerca s'ha centrat en les equacions en derivades parcials no lineals.