MONOGRÀFIC
MÈTODE SCIENCE STUDIES JOURNAL (2017). Universitat de València.
DOI: 10.7203/metode.8.8903
Article rebut: 05/09/2016, acceptat: 24/03/2017.

LA HIPÒTESI DE RIEMANN

EL GRAN REPTE PENDENT

PILAR BAYER ISANT

La hipòtesi de Riemann és una afirmació, no demostrada, que fa referència als zeros de la funció zeta de Riemann. Bernhard Riemann calculà els sis primers zeros no trivials d'aquesta funció i observà que tots estaven sobre una mateixa recta. En una memòria publicada l'any 1859, Riemann comentà que aquest podria ben bé tractar-se d'un fet general. La hipòtesi de Riemann afirma que tots els zeros no trivials de la funció zeta es troben en la recta $x = 1/2$. Més de deu bilions de zeros calculats fins avui, tots alineats sobre la recta crítica, corroboren la sospita de Riemann, però ningú encara no ha pogut provar que la funció zeta no tingui zeros no trivials fora d'aquesta recta.

Paraules clau: nombres primers, funció zeta, funció *L*, hipòtesi de Riemann, problemes del mil·lenni.

ORIGEN DEL PROBLEMA

La hipòtesi de Riemann és una afirmació, encara no provada, que fa referència a la funció $\zeta(s)$, anomenada «funció zeta de Riemann». No és difícil demostrar que la funció zeta s'anul·la en els enters negatius parells: $\zeta(-2m) = 0$, per a $m \geq 1$, raó per la qual aquests nombres s'anomenen «zeros trivials». Bernhard Riemann (1826-1866) calculà sis zeros més de la funció zeta i va observar que tots tenien part real igual a 1/2:

$$\rho_1 = 0,5 \pm i\ 14,13\ldots,$$
$$\rho_2 = 0,5 \pm i\ 21,02\ldots,$$
$$\rho_3 = 0,5 \pm i\ 25,01\ldots$$

En una memòria de l'any 1859, Riemann comentà que aquest podria ben bé tractar-se d'un fet general, tot i que ell no sabia com justificar-lo. La hipòtesi de Riemann pressuposa que tots els zeros no trivials de la funció zeta estan situats en la recta $x = 1/2$, que rep el nom de «recta crítica».

L'interès de la localització dels zeros de la funció zeta de Riemann fou destacat pel matemàtic alemany David Hilbert, l'any 1900, en el problema vuitè de la seva llista de vint-i-tres problemes oberts que presentà al Congrés Internacional de Matemàtics, celebrat a París a l'inici del segle passat. En el decurs dels anys, s'ha anat posant de relleu que la funció zeta intervé en molts problemes aritmètics, per la qual cosa una demostració de la hipòtesi de Riemann confirmaria la validesa d'un gran nombre de resultats numèrics que depenen d'aquesta afirmació. En particular, la funció zeta és, de lluny, l'eina analítica més important per a l'estudi dels nombres primers.

«LA FUNCIÓ ZETA ÉS, DE LLUNY, L'EINA ANALÍTICA MÉS IMPORTANT PER A L'ESTUDI DELS NOMBRES PRIMERS»

Més de deu bilions de zeros de la funció zeta calculats fins avui amb l'ajut dels ordinadors, tots alineats en la recta crítica, fan palesa l'extraordinària intuïció de Riemann. Al mateix temps, nombroses investigacions sobre aquest tema, insuficients fins ara per a assolir-ne el resultat final, alerten de l'enorme dificultat de la qüestió. En incloure la hipòtesi de Riemann en la llista dels set problemes del mil·lenni, l'Institut Clay s'ha fet ressò d'un problema centenari i actual alhora (Bombieri, 2000; Sarnak, 2005).

LA SÈRIE HARMÒNICA I ELS NOMBRES PRIMERS

Per a introduir la funció zeta de Riemann és útil considerar primerament la sèrie harmònica, la qual s'obté en sumar els inversos de tots els nombres naturals:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 1 + 0,5 + 0,\hat{3} + 0,25 + \ldots$$

Els conceptes de *mitjana aritmètica*, *mitjana geomètrica* i *mitjana harmònica de dos nombres* foren ja formulats pels pitagòrics. La mitjana harmònica $h(a,b)$ de dos nombres es defineix com l'invers de la mitjana aritmètica dels seus inversos:

$$h(a,b)=\frac{2}{1/a+1/b}\ .$$

El nom *sèrie harmònica* obeeix al fet que cadascun dels seus termes és la mitjana harmònica dels dos termes contigus:

$$\frac{1}{n}=\frac{2}{(n-1)+(n+1)}\ .$$

La sèrie harmònica és una sèrie divergent, és a dir, les seves sumes parcials es poden fer tan grans com es vulgui. L'erudit medieval Nicolau Oresme (1323-1382) observà aquest fet i en el text *Quaestiones super geometriam Euclidis* (Oresme, 1961) en donà la demostració següent: és evident que

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ ,$$

i també que les agrupacions de termes

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ ,$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ ,$$

són totes més grans que $1/2$, i així indefinidament; per tant,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty\ .$$

Posteriorment, el matemàtic Pietro Mengoli (1626-1686), catedràtic d'aritmètica de la Universitat de Bolonya, s'interessà per la suma dels inversos dels quadrats dels nombres naturals i sospità que aquesta podria tractar-se d'una sèrie convergent, atès que se sumen quantitats molt més petites. Leonhard Euler (1707-1783) en proporcionà el valor exacte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

En substituir en la sèrie l'exponent 2 per un nombre real s qualsevol, s'obté una sèrie convergent per a tots els valors $s>1$, que també fou avaluada per Euler en tots els enters positius parells; en aquests nombres, els valors de la funció zeta s'expressen com potències del nombre π i en funció dels anomenats nombres de Bernoulli, que són nombres racionals. De bon començament es va veure que la sèrie així obtinguda proporcionava informació sobre els nombres primers i que estudiar-la permetria anar més enllà del coneixement que d'aquests nombres pogueren adquirir-ne els grecs. A partir de la suma de la sèrie geomètrica de raó $1/p^s$, Euler obtingué el producte infinit:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in P}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots\right)=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

on el símbol P denota el conjunt de tots els nombres primers. Euler utilitzà la descomposició anterior per a donar la següent demostració, alternativa a una donada en el seu dia per Euclides, de la infinitud del conjunt dels nombres primers. Suposem que el conjunt $P=\{p_1,\ldots,p_N\}$ fos finit. Es tindria que

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ .$$

Però, per a $s=1$, el terme de l'esquerra representaria una quantitat finita, mentre que el de la dreta, tal com hem vist, representaria una quantitat infinita. Per *reductio ad absurdum* obtenim, doncs, que P és un conjunt infinit.

Euler ja advertí –i qualsevol pot adonar-se'n– que els nombres primers es comporten de manera misteriosa: no hi ha cap fórmula que permeti calcular directament l'enèsim primer p_n i, obtingut aquest, no es coneix la seva distància al primer següent p_{n+1} (Montgomery, 1973). Això comportà que les primeres qüestions en l'estudi dels nombres primers s'adrecessin a l'obtenció de fórmules que proporcionessin de manera aproximada quants primers $\pi(x)$ hi ha per sota d'una quantitat donada quan x tendeix a l'infinit. Per exemple, es té que fins a cent hi ha vint-i-cinc nombres primers; fins a mil n'hi ha 168; fins a un milió n'hi ha 78.498, etc., però no disposem de cap fórmula explícita que proporcioni el valor $\pi(x)$ d'una manera exacta per a qualsevol valor x.

En observar extenses taules de primers, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) conjecturà que $\pi(x)\sim \mathrm{Li}(x)$ quan $x\to\infty$, on la funció

$$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log(t)}$$

denota el logaritme integral. La conjectura és equivalent a la fórmula asimptòtica

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)},\quad x\to\infty\ .$$

MÈTODE

Pietro Mengoli (1626-1686), catedràtic d'aritmètica de la Universitat de Bolonya, s'interessà el 1644 per la suma dels inversos dels quadrats dels nombres naturals. L'any 1735 Leonhard Euler (1707-1783), en la imatge, proporcionà el valor exacte d'aquesta suma.

La prova d'aquesta conjectura constituí el teorema dels nombres primers, que fou demostrat per primera vegada l'any 1896 per Jacques Hadamard (1865-1963) i Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866-1962), de manera independent l'un de l'altre. Prèviament, però, hi havia hagut l'aportació fonamental de Riemann en aquest camp.

LA FUNCIÓ ZETA DE RIEMANN

L'any 1859, Riemann fou elegit membre de l'Acadèmia de Ciències de Berlín. Com a memòria d'ingrés, presentà l'estudi *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* ("Sobre la quantitat de nombres primers per sota d'una quantitat donada") (Riemann, 1859). La memòria, el manuscrit de la qual no arriba a les sis pàgines, posà de manifest que les lleis que regeixen la distribució dels nombres primers depenen en gran part del comportament de la sèrie harmònica quan aquesta s'estén a una funció de variable complexa. Donat un nombre complex $s=x+iy$, representarem per $\Re(s)=x$, $\Im(s)=y$ les seves parts real i imaginària, respectivament, i representarem per $\mathbb{C}$ el conjunt de tots els nombres complexos.

Considerem la funció de variable complexa definida per

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx\,,\ s\in\mathbb{C}\,,\ \Re(s)>1\,.$$

En la fórmula, $\Gamma(s)$ representa la funció gamma que interpola el factorial, una altra creació típicament euleriana. La sèrie anterior convergeix en el semiplà $\Re(s)>1$ però la representació integral de la funció que defineix en permet la prolongació analítica a tot el pla complex. La funció així obtinguda és la funció zeta de Riemann, $\zeta(s)$, que només pren el valor infinit en $s=1$, on la sèrie harmònica hem vist que divergeix. De fet, el comportament de $\zeta(s)$ per a $\Re(s)<0$ està determinat pel comportament de $\zeta(s)$ per a $\Re(s)>1$. Els valors de $\zeta(s)$ que aporten més informació són els situats en l'anomenada banda crítica, definida per $0\leq\Re(s)\leq 1$. L'eix de simetria de la banda crítica és la recta $\Re(s)=1/2$, dita la recta crítica. En avaluar la funció zeta en els enters negatius, s'obtenen fórmules equivalents a les d'Euler i, en particular, s'obté que $\zeta(-2m)=0$, per a tot $m\geq 1$; per aquest motiu, els enters negatius parells són els anomenats zeros trivials de la funció zeta.

Riemann establí que la funció zeta té infinits zeros a la banda crítica, i donà una estimació del nombre de zeros d'altura fitada. Escrivim, d'acord amb Riemann:

$$\xi(t):=\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,,\ s=\frac{1}{2}+i\,t\ .$$

A Riemann 1859 trobem el comentari següent sobre els zeros de $\xi(t)$:

> [...] és molt probable que totes les arrels siguin reals. Per descomptat que seria desitjable tenir-ne una demostració rigorosa; però, després d'alguns intents fugissers realitzats en va, he deixat de banda la recerca d'una prova d'aquesta mena, atès que el fet semblava prescindible per a l'objectiu immediat de la meva investigació.

Es coneix com a hipòtesi de Riemann (HR) l'afirmació segons la qual tots els zeros no trivials de la funció zeta de Riemann es troben situats en la recta crítica:

$$(\mathrm{HR})\qquad \zeta(\rho)=0,\ \ 0\leq\Re(\rho)\leq 1\,,\ \Rightarrow\ \Re(\rho)=\frac{1}{2}\ .$$

La figura 1 representa les corbes de nivell dels zeros de les parts real (en vermell) i imaginària (en blau) de $\zeta(s)$. Els zeros, representats per un punt negre, es troben on les dues corbes s'intersequen. S'hi poden veure els dos primers zeros trivials i els deu primers zeros no trivials i els seus simètrics, tots aquests sobre la recta crítica.

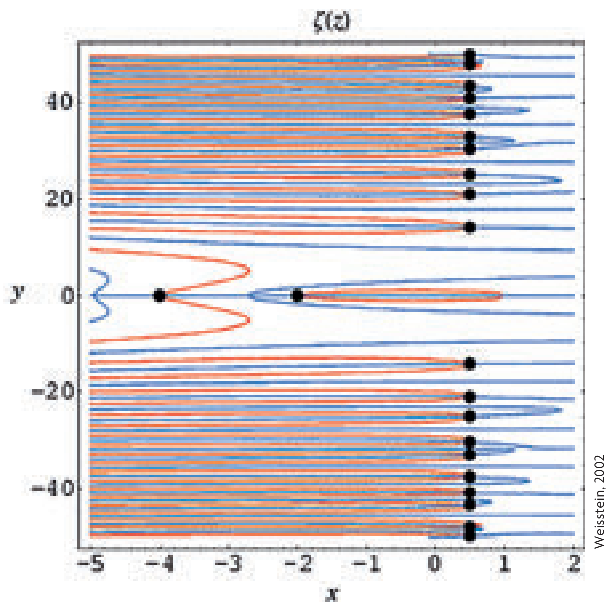


Figura 1. Primers zeros de la funció zeta de Riemann.

El 1859 Bernhard Riemann (1826-1866) fou elegit membre de l'Acadèmia de Ciències de Berlín. La seva memòria d'ingrés estava dedicada a les lleis que regeixen la distribució dels nombres primers. En la imatge, retrat del matemàtic alemany.

El resultat central obtingut per Riemann en la seva memòria és una fórmula asimptòtica per al càlcul de $\pi(x)$ que permet connectar la quantitat de primers inferiors a una quantitat donada amb els zeros de la funció zeta:

$$\pi(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} \mathrm{Li}\left(x^{\frac{\rho}{n}}\right) + O(1) ,$$

on $\mu(n)$ denota la funció de Möbius, definida segons $\mu(n) = (-1)^k$, si n és producte de $k \geq 0$ primers diferents i $\mu(n) = 0$, altrament.

La fórmula de Riemann conté tres tipus de termes: *a*) Termes que no creixen quan x creix: inclosos en $O(1)$; *b*) termes que creixen quan x creix: Li $(x^{1/n})$; i *c*) termes que creixen en valor absolut quan x creix, però que oscil·len en signe: Li $(x^{\rho/n})$**.** Riemann designà amb el nom de «periòdics» els termes oscil·latoris i interpretà que són els causants de les fluctuacions observades experimentalment en la quantitat de primers continguts en els diferents intervals (Du Sautoy, 2003; Montgomery, 1973).

La memòria de Riemann exercí i continua exercint una influència molt remarcable. Jacques Hadamard afirmà que havia necessitat tres dècades per a comprendre el seu contingut i que havia pogut demostrar totes les afirmacions de Riemann, llevat d'una: la hipòtesi de Riemann. L'any 1914, Godfrey Harold Hardy (1877-1947) demostrà que la funció $\xi(t)$ té infinits zeros reals; equivalentment, que la funció zeta de Riemann té infinits zeros en la recta crítica.

LA CONJECTURA DE HILBERT-PÓLYA

L'anomenada conjectura de Hilbert-Pólya parteix d'una creença popular. Proposa una interpretació espectral dels zeros no trivials de la funció zeta de Riemann; és a dir, hauria d'existir un operador lineal Δ els valors propis del qual es relacionessin amb els zeros no trivials de la funció zeta tal com s'indica:

$$\text{zero de } \zeta \leftrightarrow \text{valor propi de } \Delta$$

$$\rho = \frac{1}{2} + i\,\gamma \quad \leftrightarrow \quad \lambda = \rho(1-\rho) = \frac{1}{4} + \gamma^2 \ .$$

L'operador Δ seria positiu i s'escriuria com a $\Delta = D(1-D)$, essent $i(D-1/2)$ un operador lineal autoadjunt, amb la qual cosa el coneixement que es té d'aquests operadors permetria afirmar que els seus valors propis γ serien nombres reals i la hipòtesi de Riemann quedaria demostrada.


MÈTODE


MÈTODE

La conjectura de Hilbert-Pólya ha donat lloc a diverses interpretacions físiques i artístiques de la hipòtesi de Riemann. A l'esquerra, el matemàtic alemany David Hilbert (1862-1943). A la dreta, l'hongarès George Pólya (1887-1985).

Es diu que Hilbert anomenà «espectre» el conjunt dels valors propis d'un operador per analogia amb les línies espectrals produïdes per les freqüències de radiació dels àtoms. Més endavant, la mecànica quàntica confirmaria aquesta interpretació: les línies espectrals es corresponen amb vectors propis d'operadors hermítics (els quals estenen en el camp complex les propietats de les matrius reals simètriques) aportats pel hamiltonià de sistemes mecànics-quàntics. Recordem que Max Born (1882-1970), Werner Heisenberg (1901-1976) i John von Neumann (1903-1957) foren alumnes de Hilbert, a Göttingen.

La conjectura de Hilbert-Pólya ha donat lloc a diverses interpretacions físiques i artístiques de la hipòtesi de Riemann. Per exemple, el fet que puguem calcular l'espectre d'un operador que desconeixem s'ha comparat al fet de sentir una música i no saber quin instrument la interpreta.

LES FUNCIONS ZETA DE HASSE-WEIL

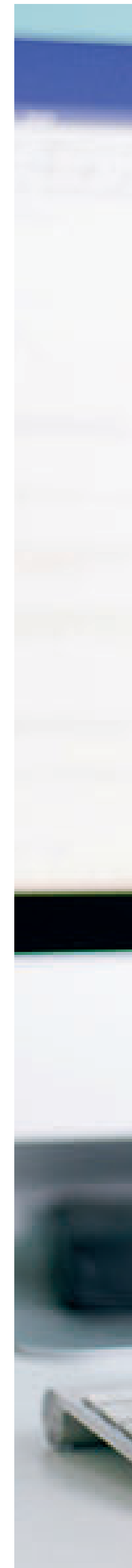
La interpretació espectral dels zeros de la funció zeta ha resultat certa en un context molt diferent: per a certes funcions zeta sorgides de l'estudi de sistemes d'equacions polinòmiques. A tota varietat algebraica X, projectiva i llisa, definida sobre el cos finit de $q = p^f$ elements se li pot associar una funció zeta de variable complexa, $\zeta(X,s)$ que té cura del nombre de punts de la varietat o nombre de solucions del sistema que la defineix. El fet més important és que els punts d'aquestes varietats poden ésser interpretats com punts fixos d'un operador, en aquest cas conegut, anomenat automorfisme de Frobenius. La funció és l'anomenada funció zeta de Hasse-Weil i és una funció molt més senzilla que la funció zeta de Riemann. Això és perquè es tracta d'una funció racional en q^{-s} i els seus zeros –que són en nombre finit– satisfan un anàleg a la hipòtesi de Riemann. Les aportacions principals en aquest camp són degudes a Emil Artin (1898-1962), Helmut Hasse (1898-1979), André Weil (1906-1998), Alexander Grothendieck (1928-2014) i Pierre Deligne, entre molts altres. La hipòtesi de Riemann en el context de les varietats algebraiques sobre cossos finits fou provada per Deligne en els anys setanta.

EPÍLEG

La funció zeta de Riemann és una eina matemàtica creada en els segles XVIII i XIX en la qual l'anàlisi de variable complexa hi fa un paper important. La seva finalitat principal fou, en principi, tenir coneixement del comportament dels nombres primers. La funció zeta de Riemann és bàsica per entendre la distribució d'aquests nombres, però un resultat molt precís relatiu a la posició dels zeros d'aquesta funció resta encara per ésser demostrat: la hipòtesi de Riemann. Provar-la implicaria disposar de lleis asimptòtiques molt més precises en el camp de la teoria

Funcions zeta i funcions aritmètiques	
Riemann	$\zeta(s)$: enters; nombres primers; equació funcional; fórmula explícita.
Dirichlet	$L(\chi,s)$: cossos ciclotòmics; progressions aritmètiques; equació funcional; fórmula explícita.
Dedekind	$\zeta(K,s)$: cossos de nombres; ideals primers; equació funcional; fórmula explícita.
Artin	$L(\rho,s)$: representacions de Galois; distribució d'ideals primers; fórmula explícita.
p-àdiques	Leopoldt; Iwasawa; cossos de nombres abelians i no abelians.
Funcions zeta i funcions *L* aritmeticogeomètriques	
Hasse-Weil	$Z(X,q^{-s})$: varietats sobre cossos finits; fórmula de Lefschetz; equació funcional; **HR**.
Serre	$\zeta(X,s)$, $L(X,s)$: teoria de Hodge; esquemes aritmètics.
Grothendieck	$L(M,s)$: motius.
p-àdiques	Varietats algebraiques sobre cossos de nombres; motius.
Funcions *L* automorfes (Programa de Langlands)	
Hecke	$L(\psi,s)$: grups de classes d'ideles; equació funcional.
Jacquet	$L(\pi,s)$: Hecke; Shimura; grups de Lie; equació funcional (cas estàndard); traces.
p-àdiques	Representacions automorfes de grups de Lie p-àdics.
Funcions zeta i funcions *L* espectrals	
Selberg	Grups kleinians; geodèsiques tancades; fórmula de traces; **HR;** grups de Lie.
Connes	Adèlics; C^*-sistemes dinàmics.
Stark	Terras; grafs finits; circuits tancats; **HR** per a grafs de Ramanujan.
Funcions zeta i funcions *L* dinàmiques	
Nielsen	Espais topològics; sistemes dinàmics; òrbites periòdiques.
Ruelle	Smale; difeomorfismes de varietats compactes; fluxos; òrbites periòdiques.
Deninger	Foliacions; fórmula de Lefschetz.

Taula 1. Recull de funcions zeta i funcions *L*, l'àmbit al qual pertanyen i algunes de les seves propietats més notables. Les lletres **HR** denoten que l'afirmació anàloga a la hipòtesi de Riemann ha estat provada en el context corresponent. Font: Pilar Bayer, 2006.



analítica de nombres; lleis que, avui per avui, són únicament conjecturals. A més, la demostració de la hipòtesi de Riemann podria tenir també conseqüències en altres disciplines com ara en anàlisi matemàtica o en teoria de la informació. Així, el tancament d'aquest problema implicaria automàticament el de molts més que s'hi relacionen, la qual cosa justifica amb escreix la dotació econòmica d'un milió de dòlars amb què està premiat!

En el decurs del segle XIX es començà a veure que el model proporcionat per la funció zeta de Riemann per a l'estudi aritmètic dels nombres enters es podia estendre a l'estudi aritmètic dels nombres algebraics; naixien així les funcions zeta de Dedekind, les funcions *L* de Dirichlet i, ja en el segle XX, les funcions *L* d'Artin i les de Hecke. El segle XX va veure així mateix l'extensió de les funcions zeta i de les funcions *L* a l'estudi de les varietats definides sobre cossos finits, que hem tractat abans. Però la història no s'atura aquí. La funció zeta de Riemann ha estat el model de moltes funcions més, conegudes també com a funcions zeta i com a funcions *L*, l'estudi de les quals conforma una bona part dels reptes plantejats en la matemàtica del segle XXI.

A la taula 1 oferim una selecció d'objectes matemàtics que tenen associada una funció zeta o una funció *L*. Algunes de les entrades de la taula 1 constitueixen extensíssims camps i programes de recerca actuals, com ara les funcions agrupades sota el nom de funcions *L* automorfes, que conformen el profund i extens programa de Langlands, el qual proposa una visió altament unificadora del món diofàntic. Els lectors interessats en ampliar aquesta informació poden consultar, entre moltes d'altres, les referències Bayer i Neukirch, 1978; Berry i Keating, 1999; Du Sautoy, 2003; Euler, 1737; Lagarias i Odlyzko, 1987; Riemann, 1859; en el cas aritmètic. En el cas aritmètic-geomètric, Deligne, 1974; Weil, 1949. Per a les funcions *L* espectrals, Connes, 1999; Katz i Sarnak, 1999; Odlyzko, 2001 i Selberg, 1956. I per a les relatives a sistemes dinàmics, Deninger, 1998; Lapidus i Van Frankenhuysen, 2001.

Tal com hem vist, molts objectes matemàtics tenen associades funcions zeta. De manera heterodoxa, podem interpretar les funcions zeta com l'ADN d'aquests objectes, atesa la quantitat d'informació que hi aporten. Cal, però, saber-la extreure i gestionar.

Javier Quesada

La demostració de la hipòtesi de Riemann podria tenir també conseqüències en disciplines com ara l'anàlisi matemàtica o la teoria de la informació.

REFERÈNCIES

Bayer, P. (2006). La hipòtesi de Riemann. En J. Quer (Ed.), *Els set problemes del mil·lenni* (pp. 29–62). Sabadell: Fundació Caixa Sabadell.

Bayer, P., & Neukirch, J. (1978). On values of zeta functions and ℓ-adic Euler characteristics. *Inventiones Mathematicae, 50*(1), 35–64. doi: 10.1007/BF01406467

Berry, M. V., & Keating, J. P. (1999). The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. *SIAM Review, 41*(2), 236–266. doi: 10.1137/S0036144598347497

Bombieri, E. (2000). Problems of the millennium: The Riemann hypothesis. *Clay Mathematics Institute*. Consultat en http://www.claymath.org/sites/default/files/official_problem_description.pdf

Connes, A. (1999). Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Selecta Mathematica (N.S.)*, *5*(1), 29–106. doi: 10.1007/s000290050042

Deligne, P. (1974). La conjecture de Weil. I. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 43*(1), 273–307. doi: 10.1007/BF02684373

Deninger, C. (1998). Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces. *Documenta Mathematica, Journal der Deutschen Mathematiker-Vereiningung, Extra Vol. ICM Berlin 1998, 1*, 163–186.

Du Sautoy, M. (2003). *The music of the primes. Searching to solve the greatest mystery in mathematic*s. Nova York: Harper-Collins Publishers.

Euler, L. (1737). Variae observationes circa series infinitas. *Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae, 9*, 160–188.

Katz, N. M., & Sarnak, P. (1999). *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Lagarias, J. C., & Odlyzko, A. M. (1987). Computing π(x): An analytic method. *Journal of Algorithms, 8*(2), 173–191. doi: 10.1016/0196-6774(87)90037-x

Lapidus, M. L., & Van Frankenhuysen, M. (2001). *Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions: AMS special session, San Antonio, TX, USA, January 15–16, 1999*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Montgomery, H. L. (1973). The pair correlation of zeros of the zeta function. En *Proceedings of Symposia in Pure Mathematcis, XXIV* (pp. 181–193). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Odlyzko, A. M. (2001). The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function. En M. L. Lapidus, & M. van Frankenhuysen (Eds.), *Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions: AMS special session, San Antonio, TX, USA, January 15–16, 1999* (pp. 139–144). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Oresme, N. (1961). *Quaestiones super geometriam Euclidis*. Leiden: Brill Archive.

Riemann, G. F. B. (1859). Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 671–680.

Sarnak, P. (2005). Problems of the millennium: The Riemann hypothesis (2004). *Clay Mathematics Institute*. Consultat en http://www.claymath.org/library/annual_report/ar2004/04report_prizeproblem.pdf

Selberg, A. (1956). Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *Journal of the Indian Mathematical Society (N.S.)*, *20*, 47–87.

Weil, A. (1949). Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bulletin of the American Mathematical Society, 55*(5), 497–508. doi: 10.1090/S0002-9904-1949-09219-4

Weisstein, E. W. (2002). Riemann zeta function zeros. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Consultat en http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html

Pilar Bayer Isant. Especialista en teoria de nombres, la seva carrera acadèmica s'ha desenvolupat a la Universitat de Ratisbona (Alemanya), la Universitat Autònoma de Barcelona, la Universitat de Santander i la Universitat de Barcelona (Espanya), institució de la qual és catedràtica des de l'any 1982. La seva recerca comprèn, entre d'altres, publicacions sobre funcions zeta, equacions diofantines, corbes el·líptiques, formes modulars i corbes de Shimura. Als anys vuitanta fundà el Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona, vigent en l'actualitat, i ha estat la directora de quinze tesis doctorals. És acadèmica numerària de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts; de la Reial Acadèmia Europea de Doctors i membre de l'Institut d'Estudis Catalans. L'any 2015 li fou concedida la Medalla d'Honor de la Xarxa Vives d'Universitats.