MONOGRÀFIC
Mètode Science Studies Journal (2017). Universitat de València.
DOI: 10.7203/metode.8.9415
Article rebut: 19/12/2016, acceptat: 10/03/2017.

LES EQUACIONS DE NAVIER-STOKES

IMPREDICTIBILITAT FINS I TOT SENSE PAPALLONES?

Xavier Mora

Matemàticament, el moviment d'un fluid es descriu mitjançant les anomenades equacions de Navier-Stokes. En l'esperit de la mecànica newtoniana, aquestes equacions haurien de determinar el moviment futur del fluid a partir del seu estat inicial. Tanmateix, i malgrat els notables esforços que s'han fet en aquesta direcció durant més d'un segle, fins ara no s'ha aconseguit demostrar matemàticament aquest determinisme, ni tampoc desmentir-lo. En aquest article es dóna una perspectiva general sobre les equacions de Navier-Stokes, el quart dels problemes del mil·lenni.

Paraules clau: equacions de Navier-Stokes, mecànica de fluids, meteorologia, determinisme newtonià, problemes del mil·lenni.

UN PROBLEMA D'INTERÈS PRÀCTIC

Un dels valors més preuats de la ciència és la capacitat de predir esdeveniments. En aquest sentit destaca particularment la mecànica celeste, que permet predir, per exemple, que el dia 14 de maig de l'any 2887 tindrà lloc un eclipsi anular de Sol que serà visible des de la meva ciutat immediatament després de la sortida del Sol.

En meteorologia, on els pronòstics tenen molt d'interès pràctic, la situació és bastant diferent. Malgrat els notables progressos que s'hi han fet, aquí no es poden fer prediccions amb gaire antelació, fins i tot sobre fenòmens de gran intensitat i extensió. Així, l'huracà Matthew, que es va passejar destructivament pel mar Carib del 28 de setembre al 10 d'octubre de 2016, no va ser pronosticat fins quatre dies abans d'aquestes dates, i llavors només se li va assignar una probabilitat del 70 %.

I no sembla que sigui qüestió de la precisió i resolució de les dades o de la potència de càlcul. Aquests paràmetres no paren de millorar sense que això repercuteixi gaire significativament en l'extensió temporal dels pronòstics meteorològics. És natural, doncs, preguntar-se si tal vegada hi ha algun límit intrínsec en l'antelació amb què es poden fer prediccions en aquest camp.

No es tracta només del famós «efecte papallona», que depèn del fet que les dades tinguin una precisió limitada. El que estem plantejant és la possibilitat que el futur sigui impredictible fins i tot suposant que les dades tinguessin una precisió infinita!

Es pot argumentar que els processos meteorològics són molt complexos. Davant d'això, convé prescindir de complicacions no essencials i considerar un sistema més senzill, com més millor, on continuï tenint substància la pregunta que ens estem fent: si hi ha o no un límit intrínsec en l'extensió temporal de les prediccions.

«UN DELS VALORS MÉS PREUATS DE LA CIÈNCIA ÉS LA CAPACITAT DE PREDIR ESDEVENIMENTS»

Considerem, per exemple, un recipient tancat i immòbil que està totalment ple d'aigua. Suposem que just abans de tancar el recipient hem posat l'aigua en moviment amb una certa força. Suposem, encara més, que just després de tancar el recipient coneguéssim exactament la magnitud i direcció de la velocitat de l'aigua en cada punt. Seria possible, llavors, predir els valors d'aquestes mateixes variables per a tot instant futur fins que l'aigua estigui pràcticament en repòs?

LES EQUACIONS DE MOVIMENT

Les possibilitats de predir el futur d'un sistema mecànic es basen en les anomenades equacions de moviment. En el cas de la mecànica celeste, es tracta de la segona llei de Newton combinada amb la llei de la gravitació universal. Segons aquestes lleis, el moviment dels astres no pot ser qualsevol, sinó que l'acceleració de cada astre –la segona derivada temporal de la seva posició– queda determinada per les posicions de tots els altres en relació amb ell. Tal com va mostrar Newton, aquest fet permet calcular com aniran variant les velocitats i posicions de tots els astres, sempre que coneguem els valors inicials d'aquestes mateixes variables.

L'extensió d'aquestes idees al cas d'un fluid no és trivial. D'entrada, cal decidir si modelem el fluid com un continu ininterromput, o bé el considerem compost d'un gran nombre de partícules separades. Aquí ens restringirem a la primera via, que és la més clàssica i d'altra banda és l'escenari on se situa el tema d'aquest article.

Les equacions de moviment d'un fluid van ser obtingudes per Leonhard Euler a mitjan segle XVIII. En el fons, no va fer altra cosa que aplicar el principi de conservació de la massa i la segona llei de Newton a una col·lecció prou rica de parts materials del fluid. Una part material la podem identificar amb la regió de l'espai que ocupa en un determinat instant. Però al cap d'un moment n'ocuparà una altra, que dependrà de com s'estigui movent el fluid. Més concretament, Euler va considerar parts materials infinitesimals: per a cada instant de temps i al voltant de cada punt, considerava la matèria continguda en un ortoedre d'arestes infinitesimals dx, dy, dz. Això el va portar cap a les equacions del moviment en forma diferencial.

«ÉS NATURAL PREGUNTAR-SE SI TAL VEGADA HI HA ALGUN LÍMIT INTRÍNSEC EN L'ANTELACIÓ AMB QUÈ ES PODEN FER PREDICCIONS EN EL CAMP DE LA METEOROLOGIA»

Les forces que actuen sobre una part material de fluid es divideixen en dues classes: les que actuen a distància, com ara la gravetat, i les que actuen per contacte amb les parts materials contigües, com ara la pressió. Euler va considerar tant la gravetat com la pressió, però no va entrar en una altra força de contacte que és essencial, per exemple, per a deduir que l'aigua del nostre recipient tancat tendirà al repòs. Per a això cal incloure també la viscositat, que es pot entendre com una fricció interna que s'oposa a les diferències de velocitat. Les forces de contacte associades amb la viscositat no van ser modelades adequadament fins entrat el segle XIX. Això va ser obra més o menys independent de Claude Navier, Augustin Cauchy, Siméon Poisson, Adhémar Barré de Saint-Venant i George Gabriel Stokes.

Com a resultat de les seves recerques va quedar establert que el moviment d'un fluid viscós i incompressible en un recipient tancat i immòbil es pot modelar mitjançant les que avui coneixem com a «equacions de Navier-Stokes». En notació vectorial es poden escriure així:

$$\begin{aligned} \partial \boldsymbol{u}/\partial t &= \nu\,\Delta \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p, && (1)\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{u} &= 0, && (2)\\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} &= 0, && (3)\\ \boldsymbol{u}|_{t=0} &= \boldsymbol{u}_0. && (4) \end{aligned}$$

En principi hi ha dues incògnites, la velocitat $\boldsymbol{u}$ i la pressió p, les quals són funcions de la posició x i del temps t. La posició x recorre tota la regió Ω ocupada pel fluid. El temps t avança des de 0 cap a $+\infty$. Per ser exactes, tots els termes de l'equació 1 llevat de l'últim haurien d'aparèixer multiplicats per la densitat del fluid, però d'ara endavant suposarem que aquesta és la mateixa a tot arreu i que les unitats s'han escollit de manera que el seu valor sigui 1. Hi ha també un paràmetre, ν, que varia segons el fluid i quantifica el seu grau de viscositat. La resta de la notació és habitual en càlcul vectorial: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ és l'operador gradient, el qual utilitzem formalment com un vector que podem multiplicar escalarment per un altre; en particular, $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ és la divergència del camp vectorial $\boldsymbol{u}$, i $\boldsymbol{u}\cdot\nabla$ és l'anomenat operador d'advecció; finalment, Δ és l'operador de Laplace $\Delta = \nabla\cdot\nabla$.

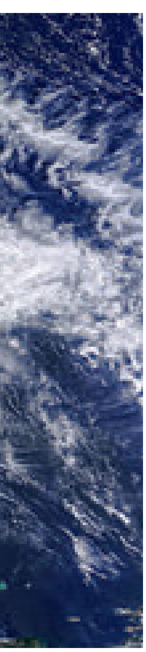
Les equacions 1 i 2 s'han de complir en qualsevol punt de la regió Ω. En canvi, l'equació 3 es


James Stuart


NASA Earth Observatory / Joshua Stevens

L'huracà Matthew, que es va passejar pel mar Carib del 28 de setembre al 10 d'octubre del 2016, no va ser pronosticat fins quatre dies abans d'aquestes dates, i llavors només se li va assignar una probabilitat del 70 %. En la imatge, l'huracà el 4 d'octubre de 2016.

Malgrat els notables progressos que s'hi han fet, en meteorologia no es poden fer prediccions amb gaire antelació, fins i tot sobre fenòmens de gran intensitat i extensió. Dalt, tornado anticiclònic a Simla, Colorado, el juny del 2015.



refereix només a la superfície $\partial\Omega$ que limita Ω: per a un fluid viscós, la velocitat s'ha d'anul·lar en qualsevol punt d'aquesta superfície. En l'esperit d'eliminar certes complicacions a què dóna lloc l'equació 3, sovint es considera també el cas en què Ω és tot l'espai, sense cap superfície límit. En aquest cas, se sol afegir, però, alguna condició asimptòtica a l'infinit, o bé simplement una condició de finitud de l'energia (cinètica) total

$$\tfrac{1}{2}\int_\Omega u^2 dV$$

(on u denota la magnitud del vector $\boldsymbol{u}$), o tal vegada una condició de periodicitat espacial en tres direccions ortogonals; en el que segueix sobreentendrem que hi ha alguna condició o altra d'aquesta mena, encara que no l'especifiquem. Finalment, l'equació 4 especifica l'estat inicial de moviment del fluid.

Doncs bé, la pregunta que formulàvem més amunt pren ara la forma següent: és cert que per a cada estat inicial $\boldsymbol{u}_0$ hi ha una sola solució de les equacions de Navier-Stokes, i que aquesta roman definida per a temps arbitràriament grans? A continuació examinarem els estudis que s'han fet per donar-hi resposta, els quals han estat obra principalment de Carl Oseen, Jean Leray i Olga Ladyzhenskaya al llarg del segle XX.

SOLUCIONS CLÀSSIQUES

L'existència i unicitat de solucions de les equacions de Navier-Stokes donat l'estat inicial es pot estudiar mitjançant un procediment d'aproximacions successives: partint d'una primera aproximació, podem introduir-la en el terme no lineal de l'equació 1 –el que conté $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$– i mirar de resoldre l'equació resultant per tal d'obtenir una nova aproximació; fet això, podem repetir el mateix procés a partir d'aquesta, i així successivament, amb l'esperança d'acostar-nos cada vegada més a la solució exacta. A diferència de l'equació 1, la que ens plantegem en cada pas d'aquesta iteració és lineal (no homogènia). Relacionat amb això, la seva solució es pot expressar mitjançant una combinació integral de certes solucions especials que corresponen a impulsos puntuals i instantanis.

Seguint aquest camí, Oseen i Leray van aconseguir tractar, entre altres, el cas en què Ω és tot l'espai, per al qual es poden calcular explícitament les solucions especials esmentades. Prescindint de certs detalls tècnics, els resultats que van obtenir són els següents:

(a) Si el temps fins al qual es demana una solució es limita a un valor prou petit, llavors obtenim una solució i només una.

(b) En general la solució no es pot estendre més enllà d'un cert temps T que pot ser finit o infinit i depèn de l'estat inicial.

(c) Si T és finit, llavors la solució desenvolupa singularitats quan t s'acosta a T; en altres paraules, hi ha punts X d'Ω tals que la velocitat pren valors arbitràriament grans quan ens acostem a (X, T).

De fet, el mètode d'aproximacions successives substitueix les equacions diferencials 1–4 per una equació integral. Aquesta equació permet veure que, mentre no apareixen singularitats, les solucions obtingudes són funcions regulars, és a dir infinitament diferenciables, i compleixen les equacions diferencials en el sentit clàssic.

D'acord amb el contrarecíproc de (c), per tal de garantir que la solució roman definida per a temps arbitràriament grans n'hi ha prou d'obtenir una fita superior sobre la magnitud que pot arribar a tenir el vector velocitat. Relacionat amb això, no costa gaire de veure que l'energia (cinètica) total del fluid disminueix amb el temps. En efecte, tal com va observar Stokes, multiplicant escalarment l'equació 1 per $\boldsymbol{u}$ i integrant per parts, s'obté l'anomenada «igualtat de l'energia»:

$$\tfrac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2\,dV + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2\,dV\,dt \;=\; \tfrac{1}{2}\int_\Omega u_0^2\,dV. \quad (5)$$

MÈTODE

MÈTODE

El quart dels problemes del mil·lenni rep el nom dels matemàtics Claude-Louis Navier (1785-1836), a l'esquerra, i George Gabriel Stokes (1819-1903), a la dreta. Com a resultat de les seves recerques va quedar establert que el moviment d'un fluid viscós i incompressible en un recipient tancat i immòbil es pot modelar mitjançant les que avui coneixem com a «equacions de Navier-Stokes».

Tanmateix, el fet que una integral sigui finita no exclou la possibilitat que l'integrand es faci infinit en algun punt. En altres paraules, la desigualtat

$$\int_\Omega u(t)^2\,dV \;\le\; \int_\Omega u_0^2\,dV$$

que es dedueix de l'equació 5 no és suficient per a obtenir la globalitat de la solució.

Dit això, en el cas bidimensional ($\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$), l'acotació sobre

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,dV\,dt$$

que també es dedueix de l'equació 5 permet arribar a obtenir la fita superior esmentada, i garanteix així que la solució roman definida per a temps arbitràriament grans, sigui quin sigui l'estat inicial.

En canvi, en el cas tridimensional, la globalitat temporal de la solució només ha estat obtinguda en el supòsit que l'energia i velocitats inicials són prou petites, o que la viscositat és prou gran.

SINGULARITATS I TURBULÈNCIA

És interessant observar que, en la pràctica, les dificultats de predicció tenen lloc precisament en condicions contràries a les del resultat que acabem de comentar; és a dir, per a velocitats grans i viscositats petites. En aquest sentit és força il·lustratiu l'experiment d'Osborne Reynolds, el 1883, sobre la turbulència, en el qual es visualitzen les evolucions espaciotemporals clarament impredictibles que tenen lloc en aquestes condicions.

Tot això porta a conjecturar que efectivament les solucions de les equacions de Navier-Stokes podrien desenvolupar singularitats, les quals estarien relacionades amb les dificultats de predicció detallada dels moviments turbulents.

Si més no, aquesta és l'opinió que van expressar tant Oseen com Leray i Ladyzhenskaya. Les cites que segueixen es poden trobar totes en Mora (2008).

Així, ja el 1910 Oseen s'expressava en els termes següents:

> Segons la nostra teoria, sembla, doncs, versemblant que puguin néixer irregularitats a l'interior d'un fluid viscós i incompressible, fins i tot en el cas en què les forces exteriors i el moviment inicial són completament regulars.

I en el seu llibre de 1927 parlava explícitament de la possible relació entre singularitats i turbulència:

> Si poden aparèixer singularitats, llavors és obvi que cal distingir dos tipus de moviment d'un fluid viscós, a saber, els moviments sense singularitats i els moviments amb

singularitats. D'altra banda, en hidràulica ja es distingeixen dos tipus de moviments: els moviments laminars i els moviments turbulents. Això porta a suposar que els moviments «laminars» dels experiments corresponen als moviments «regulars» de la teoria, i que els moviments «turbulents» dels experiments corresponen als moviments «irregulars» de la teoria. Només futures investigacions permetran esbrinar si aquesta suposició correspon o no a la veritat.

Pel que fa a Leray, només cal dir que va adoptar la denominació de «solucions turbulentes» per a referir-se a una noció generalitzada de solució que, com veurem més avall, permetria anar més enllà d'alguns tipus de singularitats. A més, també es va pronunciar explícitament a favor de la conjectura que les solucions poden desenvolupar singularitats:

> Però a partir d'aquest fet no sembla pas possible de deduir que el moviment resti ell mateix regular; jo he indicat fins i tot una raó que em fa creure en l'existència de moviments que esdevenen irregulars al cap d'un temps finit; malauradament, però, no he aconseguit construir un exemple de tal tipus de singularitat.

Finalment, pel que fa a Ladyzhenskaya podem citar el text següent, que al·ludeix a la manca d'unicitat que, segons veurem més avall, podria donar-se després de les singularitats:

> Però no es pot excloure la possibilitat que aquesta regularitat es destrueixi en algun moment. […] En tals moments catastròfics la solució es pot ramificar. […] Nosaltres pensem que tal ramificació de la solució és possible en les equacions de Navier-Stokes.


Images des Mathématiques

Tot i pertànyer a una família perseguida pel règim de Stalin, Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) va esdevindre un dels més destacats membres de l'escola soviètica d'equacions en derivades parcials. El seu tema d'investigació favorit va ser la teoria matemàtica dels fluids incompressibles.

SOLUCIONS FEBLES GLOBALMENT DISSIPATIVES

Davant la possibilitat que les solucions de les equacions de Navier-Stokes desenvolupin singularitats, és natural plantejar-se la pregunta següent: es pot donar sentit a les equacions de Navier-Stokes per a camps de velocitats que continguin singularitats?

En efecte, la presència d'una singularitat implica que la velocitat no està ben definida a tot arreu, i menys encara les seves derivades, de manera que deixen de tenir sentit els diversos termes de les equacions diferencials que se suposava que havien de determinar el moviment futur del fluid.

En aquest sentit, Oseen ja va observar que l'equació integral del mètode d'aproximacions successives pot continuar tenint sentit en presència de singularitats. No solament això; de fet, va mostrar que aquesta equació integral es podia obtenir directament a partir de les equacions que fan balanç de massa i quantitat de moviment per a una part material finita (no infinitesimal, com havia fet Euler).

Notablement, un dels passos intermedis d'aquesta deducció correspon a una noció generalitzada de solució que després va ser adoptada per Leray i que actualment constitueix una eina habitual en l'estudi de les equacions en derivades parcials. Aquestes solucions en un sentit més general s'anomenen «solucions febles». Així doncs, la pregunta que ens plantejàvem més amunt té una resposta positiva.

D'altra banda, també és cert que les equacions de Navier-Stokes suposen que les forces de fricció depenen linealment de les derivades espacials de la velocitat, la qual cosa podria deixar de ser certa per a valors elevats d'aquestes derivades. Això dóna peu a reemplaçar les equacions per certes variacions que admeten solucions globals per a qualsevol estat inicial, i estudiar el límit d'aquestes solucions, per a un estat inicial donat, quan ens acostem cada vegada més a les equacions de Navier-Stokes.

En desenvolupar aquesta idea, Leray no va poder garantir un límit únic per a tota la successió de solucions pertorbades, sinó solament l'existència de sub-

Carlos Domínguez

Considerem un recipient tancat i immòbil que està totalment ple d'aigua. Suposem que just abans de tancar el recipient hem posat l'aigua en moviment amb una certa força. Suposem també que just després de tancar el recipient coneguéssim exactament la magnitud i direcció de la velocitat de l'aigua en cada punt. Seria possible predir els valors d'aquestes mateixes variables per a tot instant futur fins que l'aigua estigui pràcticament en repòs?

successions convergents en un sentit determinat, amb límits que podrien canviar d'una subsuccessió a l'altra. Això sí, cadascun d'aquests límits és una solució feble global de les equacions de Navier-Stokes per a l'estat inicial donat.

La manera en què Leray havia modificat les equacions tenia la particularitat que les solucions pertorbades complien totes elles la igualtat de l'energia (equació 5). Tot i això, el sentit en què convergeixen les subsuccessions esmentades és massa feble per a garantir que el límit compleix la mateixa igualtat. El que sí que es pot deduir, però, és que les solucions febles obtingudes compleixen l'anomenada «desigualtat de l'energia», on el signe «=» de l'equació 5 és reemplaçat per «≤»:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} u(t)^2\,dV + \nu\int_0^t\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,dV\,dt \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\Omega} u_0^2\,dV. \quad (6)$$

Noteu que aquesta desigualtat no ha estat pas deduïda del fet que $\boldsymbol{u}$ sigui solució en sentit feble! I és que no existeix tal deducció. Si més no, el camí que hem seguit per a les solucions clàssiques –els càlculs de Stokes que hem indicat en el tercer apartat– no és practicable, ja que passa per la integral

$$\int_0^t\int_{\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\;dV\,dt,$$

la qual no té sentit en les condicions de poca regularitat que suposa la noció de solució feble.

«LA MECÀNICA DE FLUIDS NO ÉS TAN DIFERENT DE LA MECÀNICA CELESTE PEL QUE FA AL DETERMINISME»

Davant d'això, i de la importància que té la desigualtat de l'energia, convé introduir un nou concepte de solució que demani explícitament el compliment d'aquesta desigualtat a més de satisfer l'equació en sentit feble. Aquestes són les que Leray anomenava «solucions turbulentes». En lloc d'això, nosaltres en direm «solucions globalment dissipatives».

SOLUCIONS FEBLES LOCALMENT DISSIPATIVES

Recordeu que les solucions regulars compleixen l'equació 6 en forma d'igualtat. Aquesta igualtat quantifica com va disminuint l'energia a causa de la visco-

Un fluid està constituït per un gran nombre de molècules que xoquen entre elles amb una freqüència molt gran. En la imatge, fum ascendint enmig d'un corrent horitzontal.

sitat. Per tant, quan demanem que una solució feble compleixi la desigualtat 6, el que estem dient és el següent: si les singularitats comporten una desviació respecte la igualtat de l'energia, aquesta desviació ha de ser en la direcció de constituir una disminució addicional de l'energia.

Aquesta restricció va en la línia del segon principi de la termodinàmica, que en el context que ens ocupa es refereix a la dissipació de l'energia cinètica macroscòpica per conversió en energia microscòpica. Tanmateix, el segon principi s'ha de complir no només en tot el fluid en conjunt, sinó també en qualsevol part d'aquest.

Això porta de manera natural a un concepte més restrictiu de solució que inclou una versió local de la desigualtat de l'energia. Aquestes solucions, que podem anomenar «solucions localment dissipatives», van ser introduïdes el 1977 per Vladimir Scheffer. Aquest autor va comprovar que les solucions febles que dóna el procediment de pertorbació de Leray compleixen la condició esmentada, i va utilitzar aquest fet per a acotar la dimensió del conjunt de singularitats. Posteriorment, aquests resultats han estat millorats per Luis Caffarelli, Robert Kohn i Louis Nirenberg, entre altres autors.

CONCLUSIÓ

Així doncs, el problema continua sent essencialment el que plantejàvem en el segon apartat («Les equacions de moviment»), a saber, si per a cada estat inicial hi ha una sola solució i aquesta roman definida per a temps arbitràriament grans. Però també hem vist que el concepte de solució admet certes variacions, de manera que ara convé considerar-lo també com a part de la resposta.

Cal dir que el problema que és objecte de premi per part de l'Institut Clay no és ben bé aquest, sinó que es refereix a la conjectura que hem formulat en el quart apartat («Singularitats i turbulència»): aclarir –mitjançant una demostració o bé un contraexemple– si les solucions regulars romanen definides per a temps arbitràriament grans o bé poden desenvolupar singularitats en un temps finit.

Noteu que un exemple de solució que desenvolupés singularitats donaria resposta a la pregunta precedent, però no a la pregunta fonamental del determinisme, ja que en principi encara restaria oberta la possibilitat que la solució només admetés una sola continuació en la classe de solucions febles localment dissipatives.

Tornant a la comparació que fèiem en la introducció, la veritat és que la mecànica celeste tampoc és completament determinista en el sentit que estem considerant: fins i tot en el cas ideal de cossos puntuals, no es poden descartar les col·lisions; i en general les col·lisions triples admeten múltiples maneres de continuar el moviment.

Així doncs, en el fons la mecànica de fluids no és tan diferent de la mecànica celeste pel que fa al determinisme. Després de tot, un fluid està constituït per un gran nombre de molècules que xoquen entre elles amb una freqüència molt gran.

NOTA: Aquest article és un resum de «Les equacions de Navier-Stokes. Un repte al determinisme newtonià», de Xavier Mora, publicat en el *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* el 2008 i al qual remetem per a detalls més tècnics i referències bibliogràfiques acurades. Per als avenços més recents remetem a *On global weak solutions to the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with large* L_3*-initial data* (Seregin i Šverák, 2017) i les seves referències.

REFERÈNCIES

Mora, X. (2008). Les equacions de Navier-Stokes. Un repte al determinisme newtonià. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, *23*, 53–120. doi: 10.2436/20.2002.01.12

Seregin, G., & Šverák, V. (2017). On global weak solutions to the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with large L_3-initial data. *Nonlinear Analysis*, *154*, 269–296. doi: 10.1016/j.na.2016.01.018

Xavier Mora. Professor titular de Matemàtica Aplicada al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (Espanya). En 1982 es va doctorar en matemàtiques per la mateixa universitat. Ha treballat en el camp de les equacions diferencials en derivades parcials. Actualment està especialment interessat en els mètodes de votació i elecció.