MONOGRÀFIC
Mètode Science Studies Journal (2017). Universitat de València.
DOI: 10.7203/metode.8.8253
Article rebut: 27/05/2016, acceptat: 01/03/2017.

LA CONJECTURA DE HODGE

LA DIFICULTAT D'ENTENDRE QUINA FORMA TENEN ELS ESPAIS GEOMÈTRICS

Vicente Muñoz

La conjectura de Hodge és un dels set problemes del mil·lenni, i s'emmarca en les àrees de la geometria diferencial i la geometria algebraica. Va ser proposat per William Hodge en 1950, i serveix d'estímul per al desenvolupament de diverses teories que tenen les fonts en la geometria, l'anàlisi i la física matemàtica. Planteja una condició natural per a l'existència de subvarietats complexes dins d'una varietat complexa. Les varietats són els espais en què es poden considerar objectes geomètrics. En les varietats complexes l'espai té una estructura basada en els nombres complexos, en compte de l'estructura més intuïtiva de la geometria basada en els nombres reals.

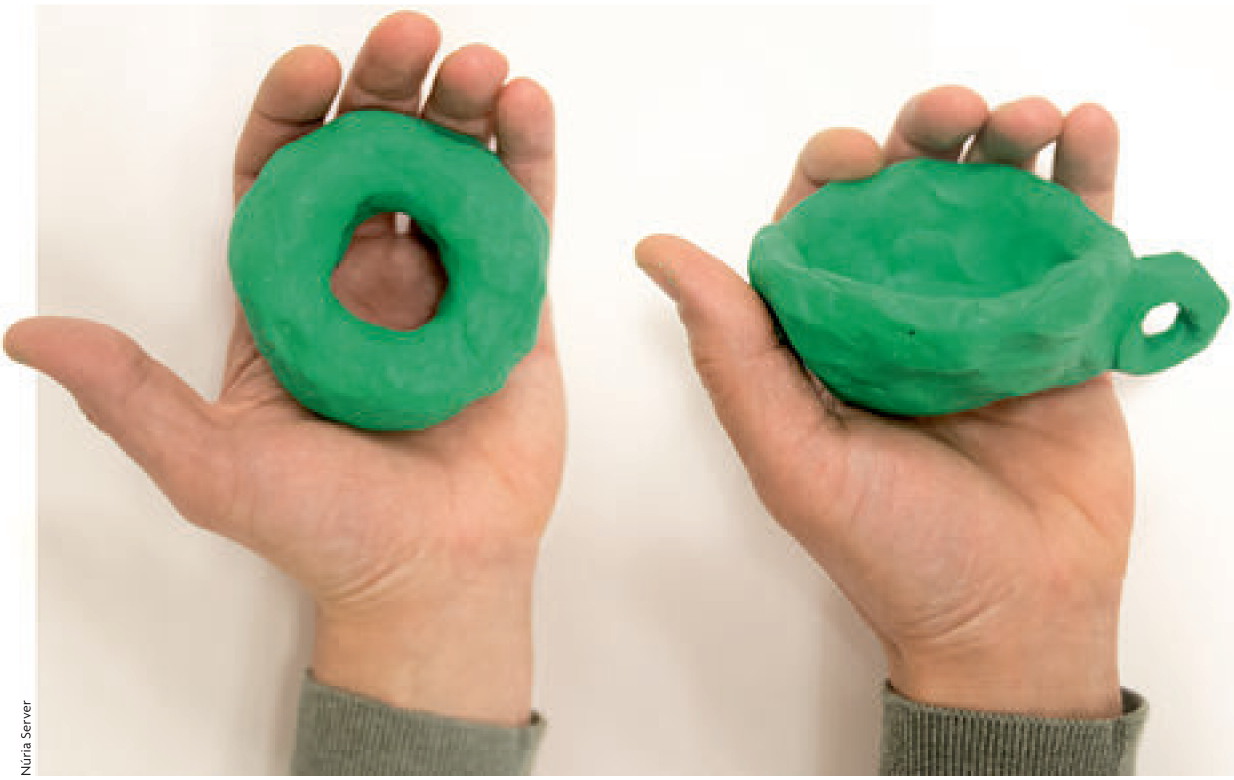
Paraules clau: geometria complexa, topologia, homologia, teoria de Hodge, varietats.

DIVULGAR MATEMÀTIQUES

Avui dia les matemàtiques s'han convertit en una àrea altament tecnificada, amb multitud de disciplines i subdisciplines. El llenguatge utilitzat en la investigació matemàtica és enormement abstracte. Per aquest motiu, quan un matemàtic s'enfronta a la tasca d'explicar un problema al gran públic s'adona de l'abisme entre el que s'entén comunament per matemàtiques i la manera de treballar de l'investigador. No obstant això, els matemàtics sabem de la importància de donar a conèixer els avenços més ressenyables i de transmetre'ls amb el llenguatge més pròxim possible. És per això que se celebren congressos amb projecció mediàtica, s'atorguen distincions a matemàtics que han aconseguit grans avenços i es proposen premis per a la resolució de problemes concrets. Els set problemes del mil·lenni en són un bon exemple. No són problemes per al comú dels mortals, però marquen unes possibles direccions de treball importants per al futur, si bé es podrien haver plantejat altres problemes igual de rellevants. Tampoc s'espera cap termini especial per a resoldre'ls («del mil·lenni» fa referència a l'entrada del nou mil·lenni, no que hagen d'estar un mil·lenni sense resoldre). El més ressenyable és que serveixen per a esperonar l'avenç científic, són el tipus de problemes que fomenten el desenvolupament de noves teories, i això és el que els fa tan valuosos.

«LA TOPOLOGIA ÉS LA BRANCA DE LES MATEMÀTIQUES QUE ES DEDICA A BUSCAR PROPIETATS DELS ESPAIS QUE PODEN SERVIR PER A DETERMINAR-NE LA FORMA»

La conjectura de Hodge és el cinquè problema dels proposats per l'Institut Clay de Matemàtiques. És un problema de l'àrea de geometria (més precisament, en termes matemàtics, de geometria diferencial i de geometria algebraica). El problema va ser originàriament proposat pel matemàtic escocès William Hodge durant el Congrés Internacional de Matemàtics que va tenir lloc l'any 1950 a Cambridge, Massachussets, Estats Units (Hodge, 1950). Aquests congressos se celebren cada quatre anys i constitueixen el major esdeveniment dins de les matemàtiques, destinats a posar al dia els distints corrents i les troballes més recents, així com a lliurar les importants medalles Fields. Hodge hi era conferenciant plenari, i en la seua conferència va exposar la recent –per a l'època– teoria de formes harmòniques per a l'estudi de la topologia de les varietats diferenciables i complexes, a hores d'ara coneguda com a teoria de Hodge. També va proposar estendre un resultat natural de representabilitat de classes d'homologia amb subvarietats en varietats diferenciables al cas de varietats complexes.



Núria Server

Dos espais que es poden obtenir l'un a partir de l'altre per una deformació reversible sense ruptures es consideren iguals. En la imatge observem la deformació d'un *donut* en una tassa. Topològicament són el mateix espai.

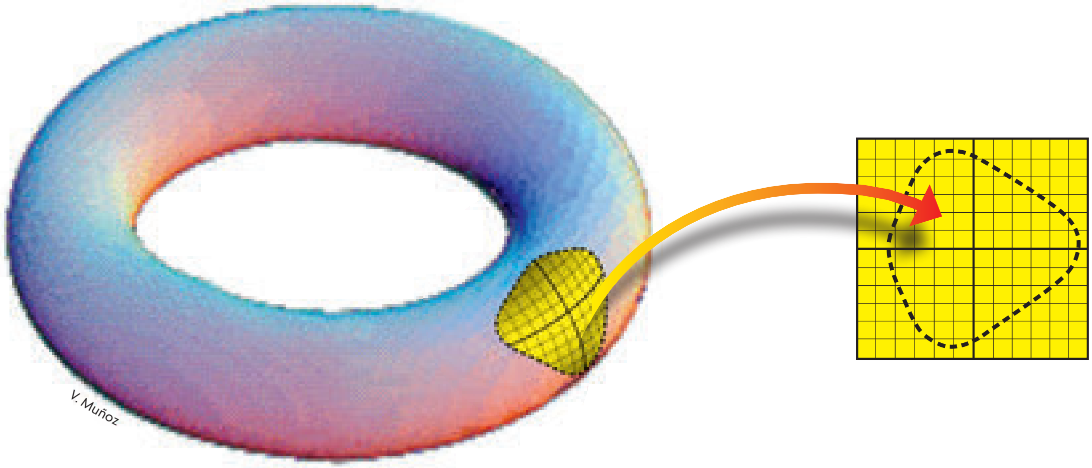
El lector podrà comptar el nombre de paraules que li semblen estranyes en l'últim paràgraf per a adonar-se del nivell de sofisticació en què es troba la matemàtica actual. Passem a introduir els conceptes mencionats per a fer intel·ligible l'enunciat.

GEOMETRIA DIFERENCIAL

La geometria és l'àrea de les matemàtiques que s'ocupa d'estudiar els espais geomètrics i els espais físics, com també les figures (objectes) i les interaccions que mantenen en aquests espais. El naixement de la geometria es remunta a l'antic Egipte i va experimentar un creixement molt important en l'antiga Grècia. Els llibres de geometria d'Euclides són probablement l'obra matemàtica més famosa de la història. S'hi descrivien les formes bàsiques del pla i l'espai (punts, rectes, polígons) i les seues interaccions (moviments, interseccions). Posteriorment, la geometria també va començar a ocupar-se de formes corbes (corbes, superfícies), i va experimentar una expansió paral·lela a la de l'anàlisi matemàtica. Isaac Newton va desenvolupar el concepte de la derivada d'una funció per definir el vector tangent a una corba. El concepte més revolucionari va sorgir amb el terme de varietat diferenciable, introduït per Bernhard Riemann en el segle XIX, que és l'objecte central de la geometria diferencial. Una varietat diferenciable és un espai que localment (en un entorn de cada punt en què ens situem) sembla un espai euclidià d'una certa dimensió n. La superfície terrestre és un bon exemple en dimensió 2. Cada regió d'una superfície pot dibuixar-se en un mapa bidimensional que pot ser quadriculat. Un lloc a la Terra es correspon amb una posició (x, y) d'aquest mapa. Òbviament aquests mapes s'encavalquen, i les coordenades depenen del mapa, però podem viatjar per tota la superfície si tenim l'atles complet de tots els mapes que la cobreixen.

«LA CONJECTURA DE HODGE ÉS UN PROBLEMA DE GEOMETRIA DIFERENCIAL I DE GEOMETRIA ALGEBRAICA»

El gran pas de la geometria, que ja anava gestant-se des de segles arrere amb els dubtes sobre la immodificabilitat dels postulats de la geometria d'Euclides (el que acabaria donant peu a les geometries no euclidianes), va consistir a adonar-se que aquesta



Cada regió d'una superfície pot dibuixar-se en un mapa bidimensional que pot ser quadriculat. En la imatge, una superfície i el seu mapa.

propietat local no obligava tot l'espai a ser $\mathbb{R}^n$. Per als no matemàtics, $\mathbb{R}$ és la recta dels nombre reals (cada posició la marca un nombre real), i $\mathbb{R}^n$ és el producte de n rectes reals en n direccions independents. Per tant, $\mathbb{R}^2$ és un pla (amb dos eixos coordenats) i $\mathbb{R}^3$ és l'espai (amb tres eixos coordenats). Clarament, encara que en situar-nos sobre la superfície terrestre ens parega veure un pla al nostre voltant, la forma global de la Terra no és la d'un pla. Un exemple més clar és el del nostre univers, que és una varietat diferenciable de dimensió *3* (obviem ací el temps, i la noció d'espai-temps, per simplificar l'exposició). Localment l'univers es pot cartografiar amb tres coordenades, però globalment (en la seua totalitat) podria tenir qualsevol forma que escapa a la nostra imaginació. Els geòmetres hem desenvolupat nombroses maneres d'entendre i de «veure» espais de tres i més dimensions.

«LA TEORIA DE HODGE ESTABLEIX UN NEXE ENTRE ANÀLISI MATEMÀTICA I TOPOLOGIA»

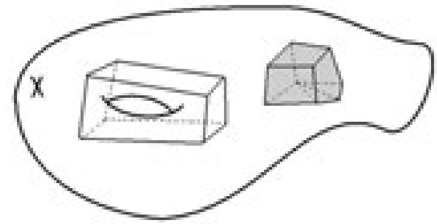
Un fet important és que en una varietat diferenciable es pot diferenciar (derivar), i això permet escriure qualsevol problema en què intervinguen equacions diferencials (com la teoria de la gravetat de Newton o la teoria de la relativitat d'Einstein). És per això que li atorguem el qualificatiu de «diferenciable».

TOPOLOGIA I HOMOLOGIA

Per classificar les varietats necessitem certes propietats matemàtiques que les distingesquen. Aquestes són les propietats globals (dites així perquè les varietats són totes localment iguals, només en la seua globalitat es diferencien). Per què una esfera i la superfície d'un donut –un tor, en matemàtiques– són distintes? Ací cal formalitzar amb molta atenció el concepte de «ser distint» i «ser igual» (amb paraules matemàtiques com «difeomorfes»). Dos espais que es poden obtenir un a partir d'un altre per una deformació reversible sense ruptures es consideren iguals. Això és degut al fet que ambdós tenen atles equivalents, és a dir, els mateixos mapes, canviant les escales de les distàncies segons les deformacions, valen per a ambdós.

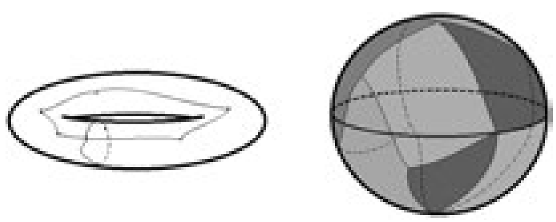
Les propietats més destacables que han servit per a distingir varietats diferenciables entre elles són les conegudes com a propietats topològiques. La topologia és la branca de les matemàtiques que es dedica a buscar propietats dels espais que poden servir per a determinar-ne la forma. És una àrea relativament recent, els orígens de la qual es remunten a Leonhard Euler, amb la seua famosa resolució del problema dels ponts de Königsberg, però que té el seu naixement oficial a començament del segle XX amb Henri Poincaré. Un concepte important en topologia és el d'homologia (Poincaré, 1895). L'homologia d'un espai compta els seus forats. L'esfera i el tor són distints perquè tenen distint nombre de forats (i, de fet, distint «tipus» de forats). Intuïtivament, un forat és «quelcom que li falta» a l'espai, però l'espai és tot el que tenim a la nostra disposició i no podem recórrer a res fora d'aquest, perquè l'espai no està en cap part ni hi ha res fora (pense el lector en el nostre univers). La solució al problema consisteix a buscar el forat en l'espai rodejant-lo amb un objecte (se sol usar un poliedre per convenció). De fet, es defineix forat k-dimensional com un poliedre de dimensió k, i s'eliminen aquells

k-poliedres que es puguen posar com la vora d'un poliedre ($k+1$)-dimensional, i en aquest cas, de fet, no hi ha forat (seria un forat fictici).



A l'esquerra, un forat de dimensió $k = 2$ en una varietat X. A la dreta, un forat fictici.

Per exemple, en el cas del tor tenim forats *1*-dimensionals donats per poligonals que envolten el tor en dues direccions. L'esfera no té aquests forats *1*-dimensionals, però té un forat *2*-dimensional que es rodeja tapant tota l'esfera. Els *k*-poliedres són topològics, és a dir, no hem de pensar-los com a rectilinis.



A l'esquerra, forats *1*-dimensionals en el tor. A la dreta, el forat *2*-dimensional de l'esfera rodejat per un *2*-poliedre curvilini que tapa tota l'esfera.

Els forats es poden sumar formalment, per a la qual cosa posem coeficients a les cares dels poliedres. La idea és que *2* vegades un cicle és equivalent a posar-lo dues vegades, una molt prop de l'altra. També es pot pensar que el posem amb un cert «pes». Aquest pes (el coeficient assignat al cicle) finalment es pot prendre negatiu, o un nombre racional com *3/2*, o fins i tot un nombre real. Quan parlem d'homologia amb coeficients racionals volem dir que permetem multiplicar els cicles per un coeficient racional.

Un resultat molt important de René Thom, pel qual li van atorgar la Medalla Fields l'any 1958, estableix que tot forat *k*-dimensional pot determinar-se o «envoltar-se» per una subvarietat de dimensió *k*. Una subvarietat és una varietat ficada dins de la varietat ambient *X,* per a la qual cosa la seua dimensió *k* ha de ser menor que la dimensió *n* de *X*. El resultat de Thom té la particularitat que necessita que s'usen coeficients racionals per a l'homologia. Com a exemple, podem pensar en el cas del tor. Els forats *1*-dimensionals d'aquest poden donar-se per subvarietats de dimensió *1*, és a dir, per corbes (en compte de per poligonals).

TEORIA DE HODGE

La teoria de Hodge posa en relació les formes harmòniques amb els elements de l'homologia, és a dir, estableix un nexe entre anàlisi matemàtica i topologia. Per a entendre-ho, pensem en el que ocorre quan tenim una unitat de calor en un punt de l'espai. Aquest es dissipa distribuint-se per tot l'espai seguint la coneguda com a equació de la calor, que té la forma següent en l'espai tridimensional (*t* és el temps i *T* la temperatura):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

La distribució de temperatura final correspon al cas estàtic (quan ja no hi ha transferència de calor dins de l'espai), i està determinada per l'equació

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

que s'anomena equació del laplacià (en honor a Pierre-Simon Laplace). Les seues solucions es denominen funcions harmòniques. Per a un espai *n*-dimensional, haurem de posar més coordenades. Les *k*-subvarietats també es «dissipen» per un procés semblant. Per a entendre-ho, hem de canviar les funcions per les *k*-formes. Una *k*-forma és un objecte matemàtic que es pot integrar en una *k*-varietat, igual com una funció s'avalua en un punt (noteu que un punt és una *0*-varietat). Per exemple, la integral usual en $\mathbb{R}^3$ es denota com $\int f(x, y, z)dx\, dy\, dz$, i l'expressió $dx\, dy\, dz$ és un exemple d'una *3*-forma.

«QUAN CANVIEM ELS NOMBRES REALS PER NOMBRES COMPLEXOS MOLTES PROPIETATS MATEMÀTIQUES SE SIMPLIFIQUEN I ES TORNEN MÉS UNIFORMES»

La potent teoria de Hodge diu que qualsevol classe d'homologia (en una *n*-varietat tancada, finita i sense vora) és donada per una única forma harmònica, seguint el procés de dissipació anàleg al de l'equació de la calor. Per a això cal usar coeficients reals en l'homologia. Per tant, els forats d'una varietat són determinats per solucions a una equació en derivades parcials d'un tipus molt especial (que es denomina equacions el·líptiques, i són equacions amb nombroses i molt bones propietats analítiques, que s'estudien en profunditat en l'àrea d'equacions en derivades parcials).

GEOMETRIA COMPLEXA

El següent pas de complexitat en l'abstracció ens porta a usar els nombres complexos (valga la redundància). Aquests nombres es denoten per $\mathbb{C}$ i són de la forma $z = x + iy$, amb x, y nombres reals i $i = \sqrt{-1}$ la unitat imaginària. És important tenir en compte que cada nombre complex depèn de dos nombres reals. En els nombres reals tots els quadrats són positius, i per tant l'equació $x^2 = -1$ no té solució. La unitat imaginària i és un símbol que s'afegeix artificialment i que compleix la propietat $i^2 = -1$. És una tònica general que quan canviem els nombres reals per nombres complexos moltes propietats matemàtiques se simplifiquen i esdevenen més uniformes. Cal recordar el teorema fonamental de l'àlgebra (demostrat per Carl Friedrich Gauss), que diu que tota equació polinòmica sempre té solucions en els nombres complexos, encara que no en tinga en els reals (és sorprenent que, en afegir la solució d'una equació, totes les equacions polinòmiques passen a tenir solucions). En física és comú també introduir els nombres complexos per a entendre processos del món real, com l'estudi de l'electromagnetisme. En geometria no podia ser diferent. Així $\mathbb{C}^2$ denota l'espai complex bidimensional, aquell que és determinat per dues coordenades complexes (z_1, z_2). Escrivint $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$, es dedueix que cada punt de $\mathbb{C}^2$ és determinat per quatre coordenades reals (x_1, y_1, x_2, y_2); és a dir, passem a estar en un espai real de dimensió *4*. Anàlogament, $\mathbb{C}^3$ denota l'espai complex tridimensional, que té 6 dimensions reals. En general, donat un espai complex E, la dimensió real de E és el doble de la seua dimensió complexa. Una varietat complexa X és aquella varietat diferenciable les coordenades (locals) de la qual són nombres complexos. En les varietats complexes es perd la intuïció espacial perquè, amb el canvi de dimensions, no podem assimilar-les a corbes o superfícies en l'espai real tridimensional.

Les varietats complexes més estudiades són aquelles que es poden definir com el lloc de l'espai $\mathbb{C}^N$ en què un conjunt de polinomis s'anul·len (més precisament, el lloc de l'espai projectiu complex, perquè obtinguem varietats tancades i sense vora, però millor no entrar en més tecnicismes). Aquestes varietats es denominen projectives i són el centre d'atenció de la geometria algebraica. Com que estan determinades per polinomis, tota la maquinària de l'àlgebra es pot usar per a obtenir les seues propietats (incloent-hi propietats topològiques!).

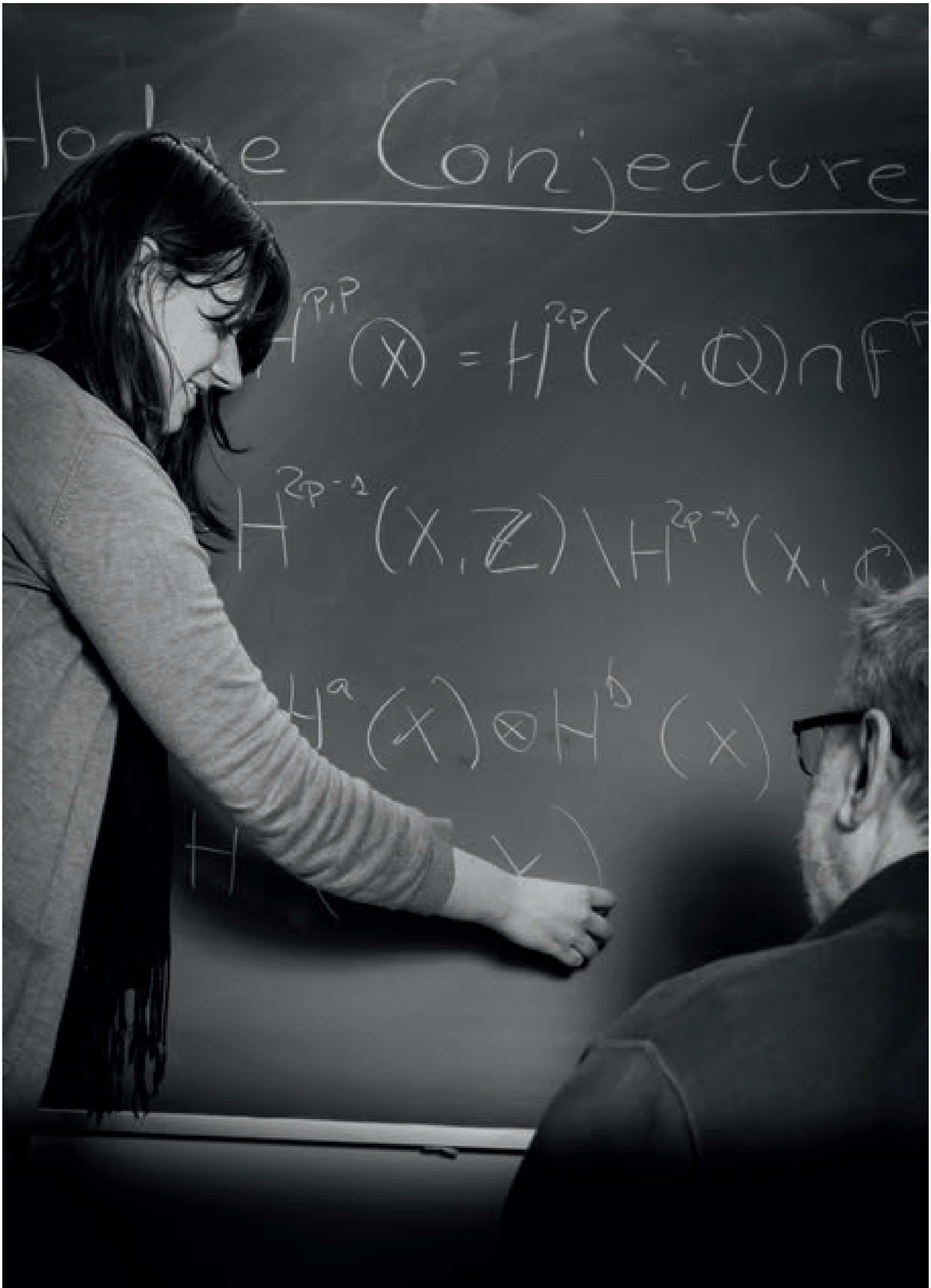
John J. O'Connor & Edmund F. Robertson

En el Congrés Internacional de Matemàtics celebrat el 1950 a Cambridge, William Hodge va exposar la teoria de formes harmòniques per a l'estudi de la topologia de les varietats diferenciables i complexes, a hores d'ara coneguda com a teoria de Hodge.

La confluència de multitud d'idees, teories i arguments en aquesta àrea és una d'aquelles característiques que confereixen la seua bellesa a les matemàtiques.

Una operació bàsica dels nombres complexos és la d'obtenir el conjugat. Si $z = x + iy$, llavors el seu conjugat és $\bar{z} = x - iy$ (solament s'ha canviat un signe). Com que es consideren formes diferenciables en una varietat complexa amb coordenades (locals) $(z_1, z_2\ldots, z_n)$, n'hi ha que depenen de variables z (s'escriuen $dz_1, dz_2\ldots, dz_n$) i n'hi ha que depenen de les variables conjugades $\bar{z}$ (s'escriuen $d\bar{z}_1, d\bar{z}_2\ldots, d\bar{z}_n$), però també n'hi ha de mixtes, que depenen en uns casos d'una variable i en altres de variables conjugades (per exemple: $dz_1\, d\bar{z}_2\, d\bar{z}_3$, que combina un terme complex i dos de conjugats). En general, tenim les formes de tipus *(p, q)*, amb $p + q = k$, que contenen p termes complexos i q termes conjugats. Per exemple, $dz_1\, d\bar{z}_2\, d\bar{z}_3$ és una (1,2)-forma en una varietat complexa de dimensió *3* (i de dimensió real *6*, si el lector no s'ha perdut encara!). Resolent l'equació harmònica per a les *(p, q)*-formes, tenim les *(p, q)*-formes harmòniques i,

«UNA CONJECTURA ÉS UNA PREGUNTA QUE D'ALGUNA FORMA ES CREU QUE HA DE SER CERTA, ENCARA QUE NO SE SAP COM DEMOSTRAR-LA»



Ana Yturralde

com ja hem indicat, també els elements d'homologia de grau *(p, q)*; és a dir, els forats de la varietat que, com que és complexa, tenen dimensions que són en part complexes i en part conjugades (en realitat, p dimensions complexes i q dimensions conjugades). Ara cal usar coeficients complexos en l'homologia (cosa que permet als cicles ser multiplicats per nombres complexos). És una conseqüència realment profunda que en una varietat complexa cada forat de dimensió k té una dimensió complexa p i una dimensió conjugada q amb $k=p+q$.

Es comprova que si una classe d'homologia està representada per una subvarietat complexa de dimensió p (i per tant la seua dimensió real és $2p$), llavors és de tipus *(p, p)*. En altres paraules, la seua dimensió complexa i conjugada estan compensades. Per tant, les subvarietats complexes representen forats (elements de l'homologia) que són racionals (de fet, enters) i de tipus *(p, p)*.

«LA IMPORTÀNCIA D'UN PROBLEMA ES MOSTRA EN LA QUANTITAT DE TEORIES QUE HA DEIXAT COM A RASTRE ABANS DE SER RESOLT»

LA IMPORTÀNCIA DEL PROBLEMA

Una conjectura és una pregunta que d'alguna forma es pensa que ha de ser certa, encara que no se sap com demostrar-la. Per això els contraexemples, construccions que desdiuen un enunciat, són tan impactants. Hodge, però, no va plantejar la seua pregunta com una conjectura, i tampoc hi ha acord si la conjectura serà certa o falsa. Les opinions entre els matemàtics estan molt dividides entre els qui pensen que es podrà provar, i els qui pensen que és falsa. El matemàtic André Weil (1980) va proposar una *4*-varietat complexa com a possible contraexemple, que encara està per dirimir. Això destaca sobre altres conjectures, com la hipòtesi de Riemann (que també apareix entre els problemes del mil·lenni), en les que tothom creu que seran certes.

Enunciem una versió moderna, ja simplificada amb el temps, i que té en compte que enunciats lleugerament semblants tenen contraexemples (Grothendieck, 1969; Voisin, 2002). Per exemple, la versió amb coeficients sencers és falsa (Atiyah i Hirzebruch, 1962). En tot cas, Hodge no va ser molt precís en la seua pregunta, al cap i a la fi estava merament intentant motivar la investigació en la direcció de la teoria de Hodge i les varietats complexes.

La conjectura quedaria enunciada així: Si X és una varietat projectiva, qualsevol classe d'homologia racional i de grau *(p, p)* es pot representar per subvarietats complexes de dimensió complexa p. L'enunciat es planteja com una extensió al resultat de Thom mencionat abans, en el qual qualsevol classe d'homologia racional de grau k es pot representar per una subvarietat (real òbviament, que és quan no s'especifica) de dimensió k. En aquest cas, les subvarietats són diferenciables, és a dir, no necessàriament donades per equacions polinomials.

La conjectura de Hodge[1] és difícil perquè les subvarietats complexes són objectes molt rígids (perquè estan definides per polinomis). De fet és molt difícil construir subvarietats complexes i sol haver-n'hi poques. Demostrar que hi ha subvarietats sense construir-les (un tipus de raonament indirecte molt socorregut) també s'ha mostrat difícil. El fet que el problema pertany a una zona de confluència de la geometria algebraica, la geometria diferencial i l'anàlisi matemàtica –per no mencionar les connexions amb la geometria aritmètica o amb la física matemàtica, a les quals no hem al·ludit en aquestes línies– fa d'aquest problema una font inesgotable d'interaccions. De fet, la importància d'un problema es mostra en la quantitat de teories que ha deixat com a rastre abans de ser resolt. Aquestes teories són les que perduraran i obriran noves línies d'investigació, i serviran per a plantejar noves preguntes per al següent mil·lenni.

REFERÈNCIES

Atiyah, M. F., & Hirzebruch, F. (1962). Analytic cycles on complex manifolds. *Topology*, *1*, 25–45. doi: 10.1016/0040-9383(62)90094-0

Grothendieck, A. (1969). Hodge's general conjecture is false for trivial reasons. *Topology*, *8*, 299–303. doi: 10.1016/0040-9383(69)90016-0

Hodge, W. V. D. (1950). The topological invariants of algebraic varieties. En *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 181–192). Cambridge, MA: American Mathematical Society.

Poincaré, H. (1895). Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*, *1*, 1–123.

Voisin, C. (2002). A counterexample to the Hodge Conjecture extended to Kähler varieties. *International Mathematics Research Notices*, *20*, 1057–1075. doi: 10.1155/S1073792802111135

Weil, A. (1980). Abelian varieties and the Hodge ring. En *Oeuvres Scientifiques Collected Papers III* (pp. 421–429). Nova York: Springer-Verlag.

Vicente Muñoz. Catedràtic de Geometria i Topologia en la Universitat Complutense de Madrid (Espanya). És investigador en geometria diferencial, geometria algebraica i topologia algebraica, específicament en teories gauge, espais de móduli, geometria simplèctica, geometria complexa i homotopia racional.

[1] El lector que vulga aprofundir en aquest problema pot fer una ullada al llibre *A survey of the Hodge conjecture*, de J. D. Lewis (American Mathematical Society i Centre de Recherches Mathématiques, 1999), o a l'article *La conjetura de Hodge* (garf.ub.es/milenio/img/Hodge.pdf), que vaig publicar després de les Jornades sobre els Problemes del Mil·lenni celebrades a Barcelona de l'1 al 3 de juny de 2011.